

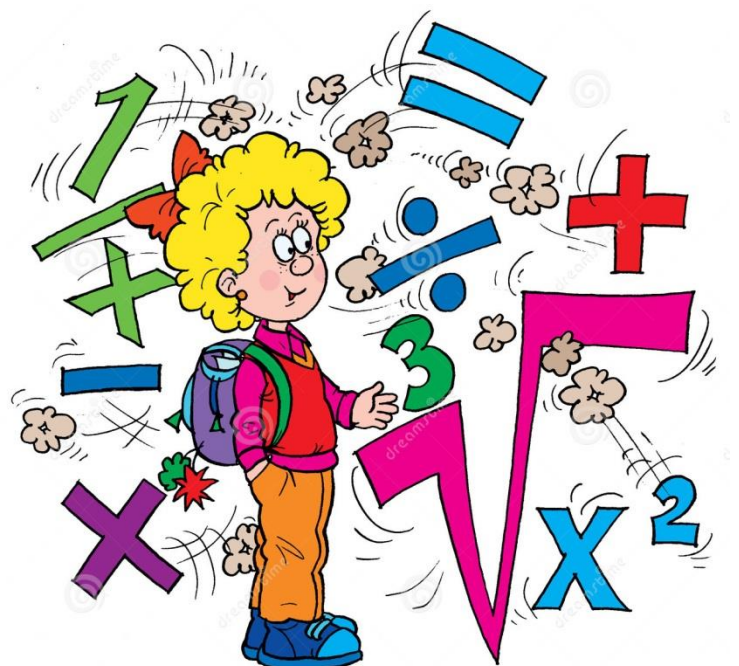
2025

חוברת עבודה

במתמטיקה

לתלמידי 5 יח' לימוד

הצולים לביתה י"א

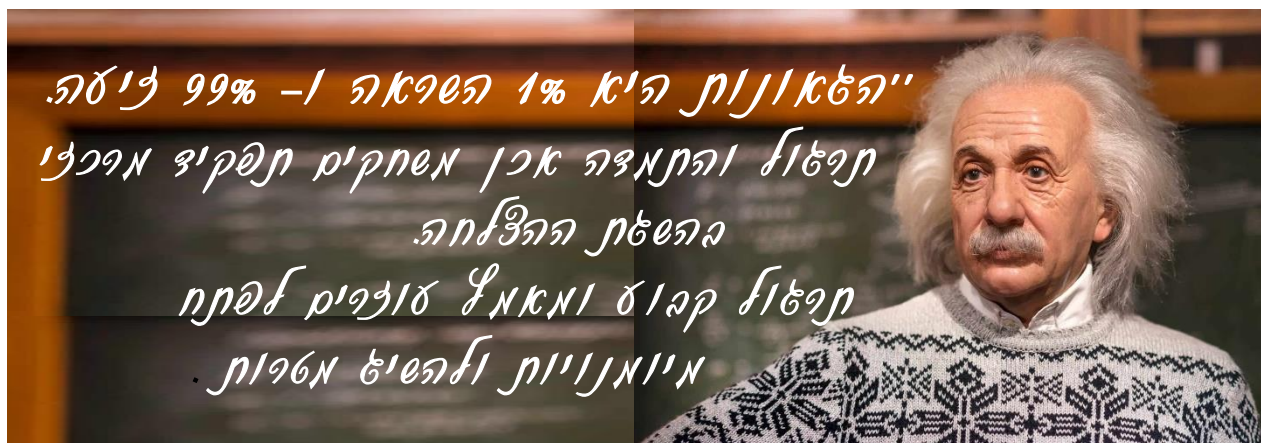


תלמידים יקרים!

במידה ותצטרכו תזכורת באחד הנושאים שמופיעים בחוברת או השלמת הנושא ניתן להיעזר באתר goolבגרויות.

כניסה לאתר באמצעות הזדהות אחידה של משרד החינוך.
בטבלה מטה תמצאו קישורים לנושאים רלוונטיים:

5 יח"ל	
ממעלה שניה	אי שוויונים
ממעלה שלישית	
אי שיוויון – מנה	
משיקים לפונקציות שונות כולל פרמטרים.	אנליזה
חקירת פונקציה מנה ושורש עד תר 59	
קשר בין גרף הפונקציה ונגזרת	
פרופורציה ודמיון משולשים תר' 1-58	גיאומטריה
מעגל הכל	
פרופורציה במעגל	



אלברט איינשטיין

פרק א' - אלגברה

אי שוויונים.

שלבי עבודה:

1. לאפס אגף הימני של אי שוויון
 2. מצא נקודות אפס של הביטוי באגף שמאלי (ע"י פירוק לגורמים או פתרון משוואה)
 3. סמן את נקודות האפס על ציר המספרים לפי הסדר.
 4. אם סימן של אי שוויון הוא $\leq$ או $\geq$ סמן נקודות אפס בנקודה מלאה, אם לא – אז בנקודה ריקה.
 5. בדוק סימן של הביטוי ע"י הצבת מספר כלשהו מהתחום הנבדק
 6. בחר את התחומים בהם התקבל סימן שמתאים לסימן של אי שוויון ורשום את התוצאה.
- ❖ באי שוויון רציאונלי צריך לסמן על הציר גם נקודות אפס של המכנה ותמיד בנקודה ריקה.

דוגמא 1

$$x^3 - 8x^2 + 15x \geq 0$$

1. נפרק לגורמים את האגף השמאלי:

$$x(x^2 - 8x + 15) \geq 0$$

$$x(x - 3)(x - 5) \geq 0$$

נקודות אפס הן:

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = 5$$

2. נסמן אתן על ציר המספרים בנקודה מלא כי :

3. נבדוק סימן של הביטוי ע"י הצבת מספר מכל תחום:

• עבור $x < 0$ נציב (-1):

$$(-)(-)(-) = -$$

• עבור $0 < x < 3$ נציב 1:

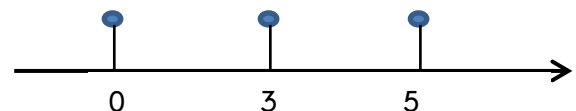
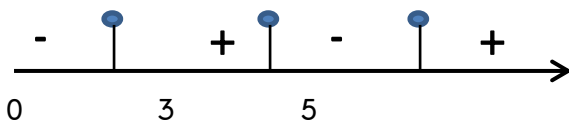
$$(+)(-)(-) = +$$

• עבור $3 < x < 5$ נציב 4:

$$(+) (+)(-) = -$$

• עבור $x > 5$ נציב 6:

$$(+) (+)(+) = +$$

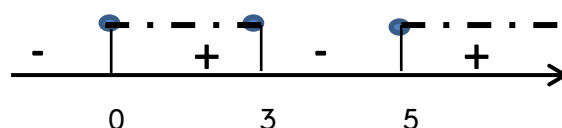


4. תחומים המתאימים לסימן של אי שוויון

הם אלה שבהם התקבל +.

לכן, הפתרונות הם:

$$0 \leq x \leq 3, \quad x \geq 5$$



אי שוויונים ממעלה שניה ומעלה: (חובה הכל)

מ ס'	תרגיל	תשובה	מס'	תרגיל	תשובה
1	$x^2 - 9x < 0$	$0 < x < 3, x < -3$	7	$x^4 - 8x < 0$	$0 < x < 2$
2	$x^3 + 4x^2 + 3x < 0$	$-1 < x < 0, x < -3$	8	$x^2 - 2x - 15 < 0$	$-3 < x < 5$
3	$x^3 - 8x^2 + 15x \geq 0$	$0 \leq x \leq 3, x \geq 5$	9	$x^2 - 6x + 5 > 0$	$x < 1 \quad x > 5$
4	$x^3 - 10x^2 + 25x > 0$	$x \neq 5 \quad x > 0$	10	$-x^2 + 10x - 25 < 0$	$x \neq 5$
5	$x^3 + 2x^2 + 4x > 0$	$x > 0$	11	$x^2 - 20x + 100 \leq 0$	$x=10$
6	$x^4 - 4x^2 \geq 0$	$x = 0, x \leq -2, x \geq 2$	12	$4x^2 - 20x + 25 < 0$	x אף

אי שוויונים ממעלה שניה:

(רק 5 יח ורק תרגילים מסומנים בצהוב)

מס ,	תרגיל	תשובה	מס ,	תרגיל	תשובה
1	$x^2 - 2x - 15 < 0$	$-3 < x < 5$	11	$4x^2 - 20x + 25 < 0$	x אף
2	$x^2 - 6x + 5 > 0$	$x < 1 \quad x > 5$	12	$x^2 - 20x + 100 \leq 0$	$x=10$
3	$-x^2 - x + 20 \leq 0$	$x \leq -5 \quad x \geq 4$	13	$x^2 + 4x + 3 \leq 0$	$-3 \leq x \leq -1$
4	$x^2 - 4x \geq 0$	$x \leq 0 \quad x \geq 4$	14	$-x^2 + 10x - 21 > 0$	$3 < x < 7$
5	$3x^2 - 48 > 0$	$x < -4 \quad x > 4$	15	$-3x^2 + 7x + 10 < 0$	$x < -1 \quad x > 3\frac{1}{3}$
6	$x^2 - 4x + 4 > 0$	$x \neq 2$	16	$6 - x - 7x^2 \geq 0$	$-1 \leq x \leq \frac{6}{7}$
7	$x^2 + 8x + 16 \geq 0$	x כל	17	$-x^2 + 10x - 25 < 0$	$x \neq 5$
8	$2x^2 + 18 \leq 0$	x אף	18	$2x^2 + 8x - 25 \leq 3x^2 + 14x$	$x \leq -5 \quad x \geq -1$
9	$-x^2 - 5 < 0$	x כל	19	$(x+4)(x+7) < 70$	$-14 < x < 3$
10	$x^2 + 20x + 100 < 10x + 79$	$-7 < x < -3$	20	$(4x-1)(x-3) > (2x-5)(x+1)$	$x < 1 \quad x > 4$

אי שוויונים רציונליים: (חובה לפתור כל תרגיל זוגי)
(חשב! אסור לבטל מכנה משותף!)

מס'	תרגיל	תשובה	מס'	תרגיל	תשובה
1	$\frac{4x-7}{5x+9} \geq 0$	$x \geq 1.75, x < -1.8$	8	$\frac{6x-x^2-11}{x-8} \leq 0$	$x > 8$
2	$\frac{x^2-7x+10}{x+1} > 0$	$x > 5, -1 < x < 2$	9	$\frac{x^2-10x+21}{x^2-4x+7} < 0$	$3 < x < 7$
3	$\frac{8}{x^2-6x+8} < 0$	$2 < x < 4$	10	$\frac{2x+2}{x-1} \leq 6$	$x \geq 2, x < 1$
4	$\frac{x-2}{(x-3)^2} \leq 0$	$x \leq 2$	11	$\frac{x^2+1}{x-2} > 10$	$x > 7, 2 < x < 3$
5	$\frac{x^2-2x+1}{x-7} < 0$	$x < 7, x \neq 1$	12	$\frac{2x^2-x+6}{x+4} \leq 2$	$x < -4$ $-0.5 \leq x \leq 2$
6	$\frac{1-x^2}{25-10x+x^2} < 0$	$x < -1, x > 1, x \neq 5$	13	$\frac{3x+6}{x^2-x-2} > 5$	$2 < x < 2.76$ $-1.16 < x < -1$
7	$\frac{x^2-15x+36}{x^2-x-6} \leq 0$	$x \neq 3, -2 < x \leq 12$	14	$\frac{x^2+7}{x^2-1} > 2$	$1 < x < 3$ $-3 < x < -1$

משוואות עם שורש ריבועי

פתור את המשוואות הבאות: (חובה לפתור כל תרגיל זוגי)
(חשב! לבדוק תחום הגדרה ולבצע בדיקה בסוף)

תשובה	משוואה		תשובה	משוואה	
אין פתרון	$\sqrt{3x-2} + 4 = 0$	9	8.5	$\sqrt{2x-1} - 4 = 0$	1
1	$3x - \sqrt{7-6x} - 2 = 0$	10	אין פתרון	$\sqrt{2x+1} + 3 = 0$	2
1,0	$\sqrt{x} - x^2 = 0$	11	4,0	$x^2 - 8\sqrt{x} = 0$	3
אף פתרון	$\sqrt{x-7} - \sqrt{2-2x} = 0$	12	2,-1	$\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x+7} = 0$	4
3,4	$\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-4x+11} = 0$	13	4,9	$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$	5
4	$x = \sqrt{x} + 2$	14	0.25	$2x + 5\sqrt{x} - 3 = 0$	6
-6,-12	$x + 3\sqrt{1-4x} = 9$	15	6	$\sqrt{x-2} + 4 = x$	7
6	$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 1$	16	0.5	$-2\sqrt{4x-1} + 3 = 2x$	8

פרק ב' – חשבון דיפרנציאלי (אנליזה)

❖ נוסחאות גזירה:

פונקציה	הנגזרת	דוגמא
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$(x^5)' = 5x^4$
$(f(x))^n$	$n \cdot f'(x) \cdot f(x)^{n-1}$	$[(3x+7)^4]' = 4 \cdot 3 \cdot (3x+7)^3$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	$[(3x+7)(x^2-4x)]' =$ $3(x^2-4x) + (2x-4)(3x+7)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\left[\frac{3x^2-4}{2x+5} \right]' = \frac{6x(2x+5) - 2(3x^2-4)}{(2x+5)^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left[\sqrt{5x^3-4x} \right]' = \frac{15x^2-4}{2\sqrt{5x^3-4x}}$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	

❖ שיפוע המשיק שווה לנגזרת של פונקציה בנקודת ההשקה $m = f'(x_1) \Leftrightarrow$

כאשר (x_1, y_1) היא נקודת ההשקה.

❖ משוואת המשיק: $y - y_1 = m(x - x_1)$

❖ ישרים מקבילים הם בעלי שיפועים שווים.

❖ לישרים מאונכים שיפועים הופכים ונגדיים

❖ שיפוע של כל ישר שווה לטאנגנס הזווית אותה יוצר ישר עם כיוון החיובי של ציר ה-X.

כל למשל: $m = \tan 45^\circ = 1$

$m = \tan 135^\circ = -1$

$m = \tan \alpha$

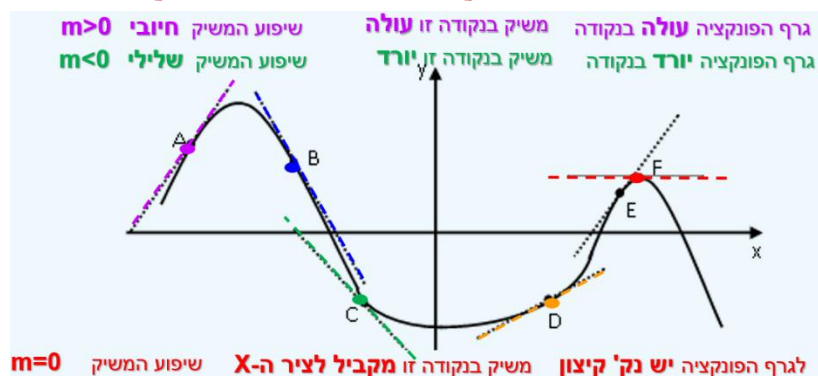
❖ בנקודות קיצון של פונקציה נגזרת מתאפסת.

❖

❖ אם נגזרת חיובית – פונקציה עולה, אם נגזרת שלילית – פונקציה יורדת.

מילון מושגים – חשבון דיפרנציאלי

שיפוע המשיק = נגזרת בנקודה



משמעותו	נתון מילולי	
$f'(x_1) = m$	שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1 שווה m	
$f'(x_1) = m$ וגם נקודת ההשקה היא משותפת, לכן ערך ה-Y גם בפונקציה וגם במשיק שווים: $f(x_1) = y(x_1)$	ישר $y = mx + b$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה x_1	
$x = a$ מאפס רק את המכנה ולא את המונה	ישר $x = a$ הוא אסימפטוטה אנכית לגרף הפונקציה	
$x = a$ מאפס גם את המכנה וגם את המונה	נקודה בה $x = a$ היא נקודת אי הגדרה ("חור")	
הערה: Y של נקודת "חור" ניתן לקבל רק אחרי צמצום של פונקציית מנה.		
$x = a$ מאפס רק את המכנה ולא את המונה. אבל !!! קיים ערך נוסף של x שמאפס גם את המכנה וגם את המונה	ישר $x = a$ הוא אסימפטוטה אנכית יחידה לגרף הפונקציה	
כאשר $x \rightarrow \pm\infty$ אז $y \rightarrow k$. יש להתייחס למקרים שונים:	ישר $y = k$ הוא אסימפטוטה אופקית לגרף הפונקציה	
(א) בפונקציית מנה $y = \frac{u}{v}$: - אם חזקה של המונה u גבוהה יותר מאשר חזקה של המכנה v, לפונקציה אין אס' אופקית - אם חזקה של המונה u קטנה מאשר חזקה של המכנה v, אס' אופקית היא ישר $y = 0$ - במידה והחזקות הגבוהות של המונה והמכנה זהות, אז אס' אופקית היא יחס בין מקדמים של החזקות הגבוהות		
(ב) בפונקציית שורש מהסוג $y = \frac{\sqrt{u}}{v}$ או $y = \frac{u}{\sqrt{v}}$ כאשר החזקות של המונה ושל המכנה שוות, יש להתייחס לשני מקרים בנפרד: $x \rightarrow +\infty$ וגם $x \rightarrow -\infty$. כמובן אם פונקציה מוגדרת עבור $x \rightarrow +\infty$ וגם $x \rightarrow -\infty$.		

בדיקת "חור" בפונקציית שורש . דוגמאות:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} \quad (2)$$

תחום הגדרה: $x^2 - x - 2 \geq 0$
 $(x - 2)(x + 1) \geq 0$ וגם $x \neq 2$



לכן, $x \leq -1$, $x > 2$

אס' אנכית: $x = 2$ מאפס גם את המונה וגם את המכנה.

לכן, נבדוק האם "חור":

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$$

ע"י צמצום לא הצלחנו "להיפטר" מהגורם שמאפס את המכנה

לכן, יש לפונקציה אס' אנכית $x = 2$

$$f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{2x-6}} \quad (1)$$

תחום הגדרה: $2x - 6 > 0$
 $x > 3$

אס' אנכית: $x = 3$ מאפס גם את המונה וגם את המכנה.

לכן, נבדוק האם "חור":

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{2} \cdot (x-3)} = \frac{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{2}}$$

ע"י צמצום הצלחנו "להיפטר" מהגורם שמאפס את המכנה

לכן, עבור $x = 3$ לפונקציה יש נק' אי הגדרה "חור"

$$y(3) = \frac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{2}} = 0$$

נק' אי הגדרה היא: $(3, 0)$

ועוד כמה דרכים לפתרון המשוואה מהסוג: $x - 8\sqrt{x} = 0$

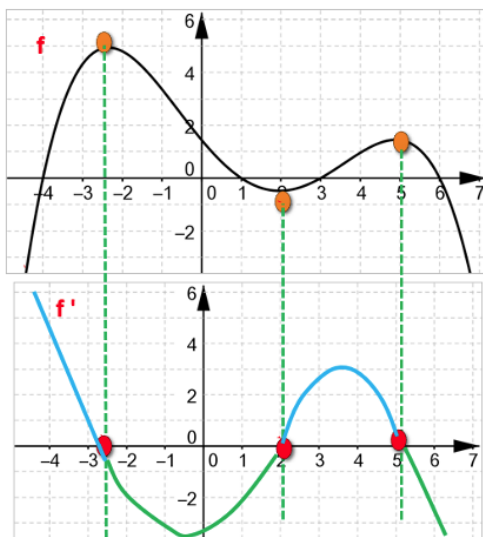
דרך ג'	דרך ב'	דרך א'
$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ $x - 8\sqrt{x} = 0$ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - 8\sqrt{x} = 0$ $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 8) = 0$ $\sqrt{x} = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $x = 0$ $x = 64$	$x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2$ לכן, נסמן: $\sqrt{x} = t$ ואז $x = t^2$ $t^2 - 8t = 0$ $t(t - 8) = 0$ $t = 0$, $t = 8$ $\sqrt{x} = 0$ $\sqrt{x} = 8$ $x = 0$ $x = 64$	$x - 8\sqrt{x} = 0$ $x = 8\sqrt{x}$ $x^2 = 64x$ $x^2 - 64x = 0$ $x(x - 64) = 0$ $x = 0$, $x = 64$ בדיקה: נציב שתי התשובות למשוואה לפני העלייה לריבוע שתיהן מקיימות לכן, הפתרונות הן: $x = 0$, $x = 64$

קשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת

נתון גרף הפונקציה f .
א- שרטטו סקיצה של f' .

מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת | נקודות קיצון, עליה וירידה

נמלא את כל הנתונים הרלוונטיים בטבלה



	$x < -2.5$	-2.5	$-2.5 < x < 2$	2	$2 < x < 5$	5	$x > 5$
$F'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$F(x)$	↗	max	↘	min	↗	max	↘

נקודות הקיצון של f הן נקודות האפס של f' .
 $\downarrow$ $x = -2.5, x = 2, x = 5$

חיתוך של f' עם ציר ה- x

תחומי העלייה של f הם תחומי החיוביות של f' .

$\downarrow$ $x < -2.5, 2 < x < 5$

גרף של $f'(x)$ מעל ציר ה- x

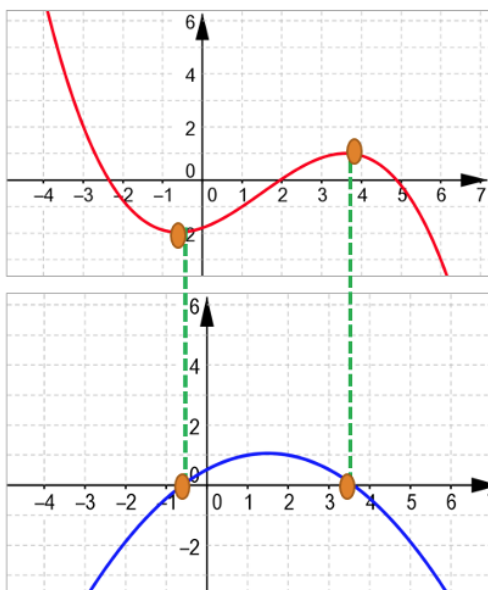
תחומי הירידה של f הם תחומי השליליות של f' .

$\downarrow$ $x > 5, -2.5 < x < 2$

גרף של $f'(x)$ מתחת לציר ה- x

מגרף הפונקציה לגרף הנגזרת | שאלה 2

שרטט גרף נגזרת של פונקציה הבאה:



	$x < -0.5$	-0.5	$-0.5 < x < 3.5$	3.5	$x > 3.5$
$F'(x)$	-	0	+	0	-
$F(x)$	↘	min	↗	max	↘

נקודות הקיצון של f הן נקודות האפס של f' .
 $\downarrow$ $x = -0.5, x = 3.5$

חיתוך של f' עם ציר ה- x

תחומי העלייה של f הם תחומי החיוביות של f' .

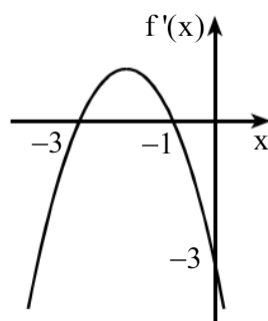
$\downarrow$ $-0.5 < x < 3.5$

גרף של $f'(x)$ מעל ציר ה- x

תחומי הירידה של f הם תחומי השליליות של f' .

$\downarrow$ $x > 3.5, x < -0.5$

גרף של $f'(x)$ מתחת לציר ה- x



33. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

א. מצא את תחומי העלייה והירידה

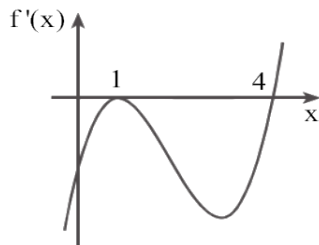
של הפונקציה $f(x)$.

ב. נתון גם: $f(-2) = 0, f(0) = 0$.

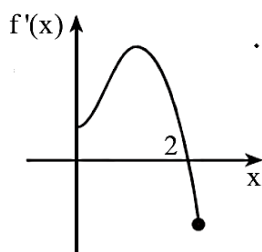
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$

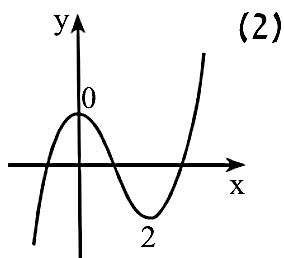
בנקודה $x = 0$.



36. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.
 א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.
 ב. נתון: $f(4)=0$.
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

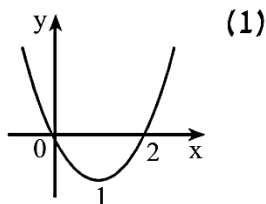


41. $f(x)$ היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $-3 \leq x \leq 3$.
 לפי גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \leq x \leq 3$.
 א. נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה זוגית בתחום $-3 \leq x \leq 3$.
 העתק את השרטוט למחברתך, והשלם את הגרף של $f'(x)$ לכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.
 ב. מהם ערכי x עבורם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות?
 ציין היכן יש מינימום והיכן יש מקסימום. נמק.
 ג. נתון: $f(x) > 0$ לכל x בתחום $-3 \leq x \leq 3$, $f(-2)=1$.
 שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל התחום $-3 \leq x \leq 3$.

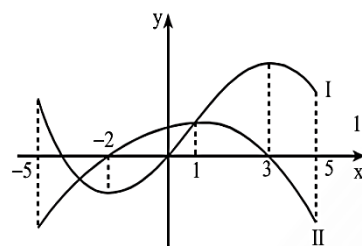


49. בציורים (1) ו-(2) שלפניך מתוארים, לאו דווקא לפי הסדר, הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, כאשר $f(x)=g'(x)$.

- א. זהה איזה מהגרפים הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$ ואיזה מהם הוא הגרף של הפונקציה $g(x)$. נמק את תשובתך.
 ב. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f'(x)$.
 שרטט גרף אפשרי של הפונקציה $h(x)$.



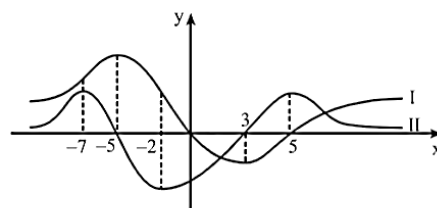
- בציור שלפניך מתוארים, הגרפים I ו-II בתחום $-5 \leq x \leq 5$.
 אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



- א. איזה מהגרפים הוא הגרף של הפונקציה $f(x)$? נמק.
 ב. (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוג הקיצון.

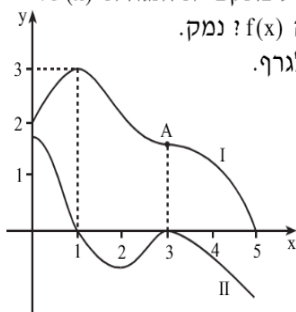
- (4) מהו התחום שבו $f'(x)$ חיובית וגם $f''(x)$ חיובית?

- בציור שלפניך מתוארים הגרפים I ו-II. אחד הגרפים הוא של הפונקציה $f(x)$ והאחר הוא של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.



- א. קבע עבור כל ציור לאיזו פונקציה הוא מתאים. נמק את תשובתך.
 ב. (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוג הקיצון.

- בציור שלפניך מוצגים הגרפים I ו-II בתחום $0 \leq x \leq 5$. אחד הגרפים הוא סקיצה של הפונקציה $f(x)$ והאחר של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

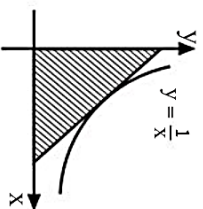


- א. איזה גרף, I או II, הוא של הפונקציה $f(x)$? נמק.
 ב. בנקודה A שעל גרף I העבירו משיק לגרף. מהו שיפוע המשיק. נמק.

משיק עם פרמטרים – פונקציות רציונליות

3. הווא 1 $x = 1$ בנקודה $y = \frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}$ לגרף הפונקציה (30)

- ב. רשום את משוואת המשיק בנקודה $x = 1$ בעזרת a .
ג. מצא את a אם המשיק עובר דרך הנקודה $(2, 5)$. (הנקודה לא על גרף הפונקציה).



31. לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{x}$, ברביע הראשון, העבירו משיק בנקודה $(a, \frac{1}{a})$.
א. הבע באמצעות a את שיעורי נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
ב. הראה ששטח המשולש שהמשיק יוצר עם הצירים לא תלוי a ונמצא אותו.

35. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{9-2x}{x+a}$ בנקודה $x = 3$ הוא $\frac{1}{4}$.
א. מצא את שני הערכים של a .
ב. עבור הערך הקטן של a , מבין שתי האפשרויות שמצאת, מצא את משוואת המשיק הני"ל.

36. נתונה הפונקציה $y = ka^2 + \frac{2}{x-3}$. המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 4$ מאונך לישר $y = -\frac{1}{2}x + 6$. מצא את k ואת משוואת המשיק.

37. המשיקים לגרף הפונקציה $y = \frac{3x+B}{x^2+1}$ בנקודות $x = 1$ ו- $x = 2$ מקבילים זה לזה. מצא את B .

41. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2+B}{x-A}$ היא $y = -5x + 2$. מצא את A ואת B .

42. לגרף הפונקציה $y = a + \frac{b}{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 5$. משוואת המשיק היא $y = -2x + 7$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

משיק עם פרמטרים – פונקציות רציונליות

27. המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x+a}{x+1}$ בנקודה $x = 3$ מאונך לישר $y = -4x + 3 = 0$. מצא את a .

- ב. מצא את שתי הנקודות על גרף הפונקציה שהמשיקים בהן מאונכים לישר הני"ל.

28. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{x^2-6}{x+a}$ בנקודה $x = 1$ הוא 3.

- א. מצא את שני הערכים האפשריים של a .
ב. הראה שעבור a הקטן מבין השניים שמצאת בסעיף א' אין משיק לגרף הפונקציה שמאונך לישר $x = 5$.

29. שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2-1}$ בנקודה $x = 2$ שווה לשיפוע הפונקציה $g(x) = \frac{a-5}{x} + 3$ בנקודה $x = 1$.
א. מצא את a .

- ב. הראה שהמשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 2$ הוא גם המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה $x = 1$ ונמצא את משוואת המשיק המשותף.
ג. $h(x)$ היא פונקציה שמקיימת $h'(x) = f(x)$ בתחום $x > 1$. ישר ששיפועו 3 משיק לגרף הפונקציה $h(x)$. מצא את שיעור x של נקודת החשק.



29. א. $(2, -\frac{2}{3})$, ב. $(-5, 0)$, ג. $(3, 2)$.
27. א. $y = x + 9$, ב. $y = x - 3$.
31. א. $(2a, 0)$, ב. $(0, \frac{2}{a})$.
30. א. $y = -4x + 11$, ב. $y = 3x + a - 4$.
34. א. $k = 2$, ב. $(4, 8)$.
35. א. $a = -5$, ב. $y = -2x + 16$.
36. א. $k = \frac{1}{2}$, ב. $y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}$.
37. א. $B = 2$, ב. $A = 2$.
39. א. $c = -5$, ב. $b = -3$, ג. $a = 3$.
40. א. $c = -5$, ב. $b = -3$, ג. $a = 3$.
41. א. $k = 2$, ב. $(4, 8)$.
42. א. $k = \frac{1}{2}$, ב. $y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}$.

תשובות: 29. א. $(2, -\frac{2}{3})$, ב. $(-5, 0)$, ג. $(3, 2)$. 27. א. $y = x + 9$, ב. $y = x - 3$. 31. א. $(2a, 0)$, ב. $(0, \frac{2}{a})$. 30. א. $y = -4x + 11$, ב. $y = 3x + a - 4$. 34. א. $k = 2$, ב. $(4, 8)$. 35. א. $a = -5$, ב. $y = -2x + 16$. 36. א. $k = \frac{1}{2}$, ב. $y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}$. 37. א. $B = 2$, ב. $A = 2$. 39. א. $c = -5$, ב. $b = -3$, ג. $a = 3$. 40. א. $c = -5$, ב. $b = -3$, ג. $a = 3$. 41. א. $k = 2$, ב. $(4, 8)$. 42. א. $k = \frac{1}{2}$, ב. $y = \frac{1}{4}x - 1\frac{1}{4}$.

★ נקודות אי הגדרה – "חור"

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות: א. מצא את תחום ההגדרה.
ב. מצא את האיסימפטוטות המאונכות לציר ה- x (אם קיימות).
ג. מצא את שיעורי ה- x בהם מתקבל "חור" בגרף הפונקציה (אם קיימים).

$$y = \frac{x-2}{x^2-5x+6} \quad .25 \quad y = \frac{2x^2+14x}{x} \quad .24 \quad y = \frac{x^2-36}{x+6} \quad .23$$

$$y = \frac{3x^2+17x-6}{x^2+4x-12} \quad .28 \quad y = \frac{2x^2-5x+2}{4x-2} \quad .27 \quad y = \frac{x^2+6x+8}{x^2-16} \quad .26$$

$$y = \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x+1} \quad .31 \quad y = \frac{x+3}{x^2+6x+9} \quad .30 \quad y = \frac{x^2-6x}{(x-6)^2} \quad .29$$

. $x \neq -6$, N. 23 . $x = -3$, ג. . $x = 3$, ב. . $x \neq -3$, N. 22 . $x = 5$, ג. . $x = 0$, ב.
ג. N. 24 . $x = -6$, ג. . $x = 0$, N. 25 . $x \neq 0$, ב. N. 26 . $x = 2$, ג. . $x = 3$, ב.
ג. N. 27 . $x = -6$, ג. . $x \neq 2$, N. 28 . $x = \frac{1}{2}$, ג. N. 29 . $x = 6$, ב. . $x \neq 6$, N. 30 . $x = -3$, ב. . $x \neq -3$, N. 31 . $x = 1$, ב. . $x \neq 1$, N. 32 . $x = -3$, ב. . $x \neq -3$, N. 33 . $x = 3$, ג. . $x \neq 3$, N. 34 . $x = 4$, ב. . $x \neq 4$, N. 35 . $x = 2$, ג. . $x = 3$, ב.

מצא את האיסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $y = \frac{x-2}{x^2-6x+8}$.

פתרון:

נשווה את המכנה לאפס: $x^2-6x+8=0$ נקבל: $x=2$ או $x=4$

פתרונות המשוואה הם: $x=2$ או $x=4$

נציב $x=4$ במונה, נקבל: $4-2=2$, כלומר 2. הפתרון $x=4$ אינו מאפס את המונה, לכן הישר $x=4$ הוא איסימפטוטה אנכית לפונקציה.

נציב $x=2$ במונה, נקבל: $2-2=0$, כלומר 0. הפתרון $x=2$ מאפס את המונה, לכן קיימת אפשרות שב- $x=2$ לא מתקבלת איסימפטוטה אנכית, אלא קיים "חור בגרף". נבדוק זאת לפי שתי הדרכים שהצגנו.

דרך א': תחילה נמצא את הפונקציה ככל שאפשר.

$$y = \frac{x-2}{x^2-6x+8} = \frac{x-2}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{x-4}$$

הפונקציה שהתקבלה לאחר צמצום היא $y = \frac{1}{x-4}$

הפתרון $x=2$ אינו מאפס את המכנה,

לכן לא מתקבלת בו איסימפטוטה

אנכית, אלא נוצר "חור בגרף".

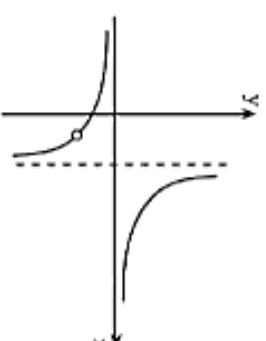
לסיכום, לפונקציה יש איסימפטוטה

אנכית אחת והיא הישר $x=4$.

גרף הפונקציה נראה כמתואר משמאל:

שים לב! הפונקציה הנתונה היא $f(x) = \frac{x-2}{x^2-6x+8}$

פונקציה זו מוגדרת עבור $x \neq 2, x \neq 4$.



חקירת פונקציות רציונאליות – ללא פרמטרים (חזרה)

$$(1) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x+3}$$

שימו ❤ **על סעיפי חשיבה בעמוד הזה.**

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
- ו. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .
- ז. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ח. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = bf(x) - 3$, $b > 0$. ידוע שהמקסימום המוחלט של $g(x)$ הוא 5.
- (1) מצא את b . (2) מצא את המינימום המוחלט של $g(x)$.

$$(2) \quad \text{נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{-6x}{x^2-6x+9}$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ז. (1) מצא לאילו ערכי m אין פתרון למשוואה $f(x) = m$.
- ★ (2) כמה פתרונות יש למשוואה $f(x) = m$ אם $\frac{1}{4} < m < \frac{1}{2}$?

$$(3) \quad f(x) \text{ היא פונקציה שהנגזרת שלה היא הפונקציה } f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f'(x)$.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f'(x)$.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f'(x)$.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f'(x)$.
- ז. ידוע שתחום ההגדרה של $f(x)$ הוא כמו תחום ההגדרה של $f'(x)$.
- (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

חקירת פונקציה מנה – מציאת פרמטרים

10 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{a}{x^2-4}$ בנקודה $x = -3$ הוא 6.

א. מצא את a .

ב. מצא:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) נקודות קיצון.

(4) תחומי עלייה וירידה.

(5) אסימפטוטות המאונכות לצירים.

ג. שרטט את גרף הפונקציה.

★ ד. היעזר בגרף של $f(x)$ ושרטט את הגרף של $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

11 נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2-6x+1}{(x-1)^2}$. שיעור ה- x של נקודת החיתוך של הפונקציה עם

האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x הוא 1.5.

א. מצא את a .

ב. מצא לגבי הפונקציה את נקודת הקיצון, את האסימפטוטות המקבילות לצירים ושרטט את הגרף שלה.

ג. מצא כמה נקודות חיתוך יש לישר $y = k$ ולגרף הפונקציה אם:

(1) $k = 4$

(2) $k = 1$

(3) $k < 0$

(4) $k > 5$

12 לפונקציה $f(x) = \frac{ax^2+4x-18}{x^2-b}$ יש אסימפטוטה $y = 2$ ואסימפטוטה $x = -2$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודות החיתוך עם הצירים.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי העלייה הירידה.

ה. שרטט את גרף הפונקציה.

★ ו. x_1 הוא מספר בתחום $-2 < x < 2$ ו- x_2 הוא מספר בתחום $x > 2$.

נתון: $f(x_1) - f(x_2) = c$. באיזה תחום נמצא c ? נמק.

13 הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{bx-x^2}$. לפונקציה נקודת קיצון ב- $x = 1$.

א. מצא את a ו- b ואת נקודת הקיצון.

ב. מצא אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים ונקודת קיצון נוספת.

ג. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים ואת תחומי העלייה הירידה.

ד. שרטט את גרף הפונקציה.

★ ה. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g(x) = (f(x))^2$. מצא עפ"י החקירה של $f(x)$ את הנקודות בהן הנגזרת של $g(x)$ מתאפסת.

15 נתונה הפונקציה $y = \frac{ax-6}{x^2-4x-b}$ הישר $x = -1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה.

בנקודה שבה $x = -7$ לפונקציה יש נקודת קיצון.

א. מצא את a ו- b . (המשך התרגיל בעמ' הבא)

ב. הצב את a ו- b שמצאת בפונקציה ומצא את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(3) נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

(4) נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 נתונה הפונקציה $y = \frac{ax^2+bx-8}{(x+2)^2}$ הנקודה $(1, -\frac{5}{3})$ היא נקודת קיצון של הפונקציה.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא אם יש נקודות קיצון נוספות.

ד. קבע את הסוג של נקודות הקיצון.

ה. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ועם האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x .

17 נתונה הפונקציה $y = \frac{x^2-3x+a}{x^2-3x+2}$ ישר המשיק לפונקציה בנקודה $x = -1$ חותך

את ציר ה- x בנקודה $x = \frac{7}{5}$.

א. הוכח: $a = 0$.

הצב בפונקציה $a = 0$ ומצא את:

ב. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. האסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.

ה. נקודות הקיצון של הפונקציה.

ו. נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .

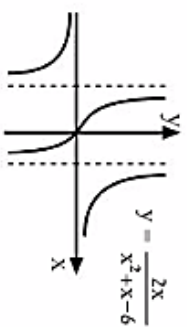
20 ★ נתונה הפונקציה $y = \frac{2x^2-8}{ax^2+bx-10}$ לפונקציה יש אסימפטוטה אחת בלבד המאונכת

לציר ה- x והיא הישר $x = 5$. כמו כן ידוע שהפונקציה לא מוגדרת עבור ערך נוסף של x וערך זה הוא שלילי.

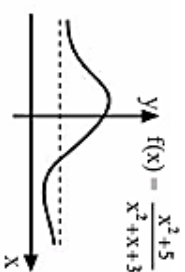
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את a ו- b .

ג. חקור את הפונקציה: מצא נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, אסימפטוטות המקבילות לצירים ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



6. א. $x \neq -3$, $x \neq 2$. ב. אין.
 ג. יורדת: $-3 < x < 2$ או $x < -3$ או $x > 2$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = 2$. ו. $x = -3$. ז. $y = 0$, $x = -3$. ח. לא.



1. א. כל x . ב. $(0, \frac{5}{3})$. ג. $(-1, 2)$.
 מקסימום, $(5, \frac{30}{33})$, מינימום. ד. עולה:
 $-1 < x < 5$ או $x > 5$. יורדת: $x > 5$ או $x < -1$.
 ה. $y = 1$. ו. $(2, 1)$. ח. $(1, 4)$. ט. $-\frac{7}{11}$.

תשובות (תרגילים לחזרה – חקירת פונקציות רציונליות):

2. א. $x \neq 3$. ב. $(-3, \frac{1}{2})$. ג. מקסימום.

- ג. עולה: $-3 < x < 3$ או $x > 3$. יורדת:
 $x < -3$ או $x > 3$. ד. $(0, 0)$. ה. $x = 3$. ו. $y = 0$.
 ז. $y = 0$. ח. $y > \frac{1}{2}$. ט. $(1, 2)$ שניים.

3. א. $x \neq 1$. ב. אין. ג. עולה: $x > 1$.

- יורדת: $x < 1$. ד. $(0, -3)$, $(3, 0)$.
 ה. $x = 1$, $x = 3$. ו. $y = 1$. ז. $x = 3$. ח. $x = -1$.
 ט. $x = -1$. י. $x > 3$. יא. $x < -1$. יב. $x < -1$.
 יג. $x < -1$. יד. $x < 3$. יו. $x < 3$. יז. $x < -1$.

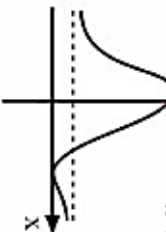
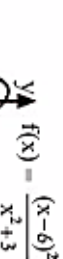
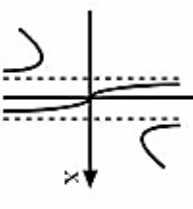
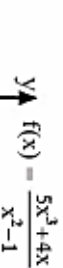
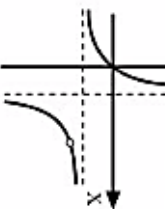
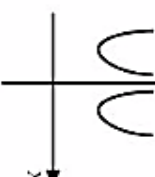
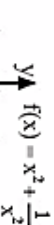
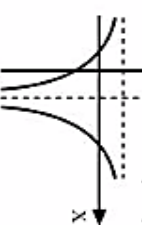
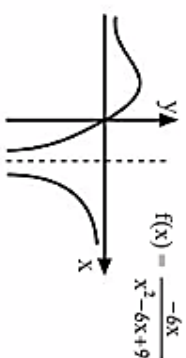
4. א. $x \neq 0$. ב. אין. ג. $(1, 2)$.

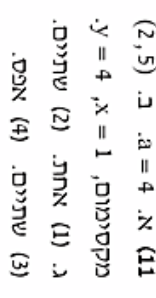
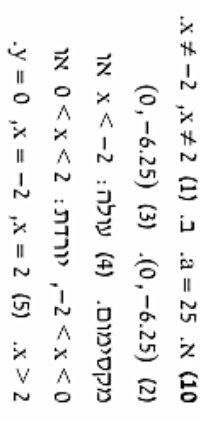
- מינימום, $(-1, 2)$. מינימום.

- ד. $x = 0$. ה. עולה: $x < 0$. ו. $x < -1$ או $x > 1$.
 יורדת: $x > 1$ או $x < -1$. ז. $0 < x < 1$.

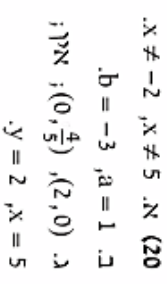
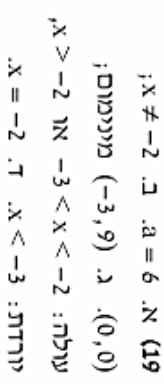
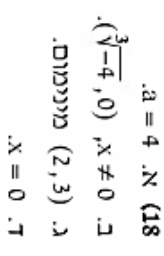
5. א. $x \neq 4$, $x \neq -1$. ב. $(0, 0)$. ג. $(-\frac{1}{2}, 0)$.

- ד. $x = 4$, $x = -1$. ט. $y = 2$. י. $x = -1$, $x = 4$.
 מינימום, $(-\frac{2}{7}, \frac{1}{25})$. מקסימום. ה. עולה:
 $-1 < x < -\frac{2}{7}$ או $-2 < x < -1$. יורדת:
 $x > 4$ או $-\frac{2}{7} < x < 4$ או $x < -2$.
 יז. $0 < x < 4$.





112. נ. $a = 2$, ב. $b = 4$, ג. $(0, 4, 5)$, ד. $(-4, 16, 0)$, ה. $(2, 16, 0)$
 עולה: מסיימים, $(1, 4)$ מניימים.
 א. $x < -2$ או $1 < x < 2$
 ב. $2 < x < 4$
 ג. $x > 4$ או $-2 < x < 1$
 ד. $x \geq 1.5$



18. לטונקציה $f(x) = \frac{x^2}{x-4} + b$ יש נקודת מינימום בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 18.

(המשך התיקל בעמ' הבאה)

- מצא את b .
 - מצא את נקודות הקיצון של הטונקציה.
 - מצא את נקודות החיתוך של הטונקציה עם הצירים.
 - מצא את האיסימפטוטה האנכית של הטונקציה.
 - שרטט סקיצה של גרף הטונקציה.
 - מצא לאילו ערכי k הישר $y = kx$ חותך את גרף הטונקציה:
 - בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.
19. $\star$ (1) $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$ בתחום $x < 4$.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הטונקציה $g(x)$.
- (3) ידוע שהטונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודה $x = 3.851$ בקירוב ונקודת הקיצון שלה נמצאת מעל לציר ה- x . שרטט בצורה כללית גרף של הטונקציה $g(x)$.
- (4) מעבירים משיק לגרף הטונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = 3$. מצא את שיעור ה- x של הנקודה שנמצאת על גרף הטונקציה $g(x)$ והמשיק בה לגרף הטונקציה $g(x)$ מקביל למשיק הנ"ל.

43) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{x^2+4x}{x^2-4}$ בנקודה $x = 0$ הוא $\frac{1}{2}$.

- מצא את a .
 - מצא את תחום ההגדרה של הטונקציה.
 - מצא את האיסימפטוטות של הטונקציה המקבילות לצירים.
 - הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
 - שרטט סקיצה של גרף הטונקציה.
20. $\star$ 1. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

הקירות פונקציה עם פרמטרים – פונקציות רציונליות

39) לטונקציה $f(x) = \frac{12x}{x^2-6x+a}$ יש נקודת קיצון בנקודה $x = -3$.

- מצא את a .
 - מצא את תחום ההגדרה של הטונקציה.
 - מצא את נקודת הקיצון של הטונקציה.
 - מצא את האיסימפטוטות של הטונקציה המאונכות לצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הטונקציה.
 - מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הטונקציה.
21. $\star$ מצא את האיסימפטוטות המאונכות לצירים של הטונקציה $f'(x)$.
22. $\star$ שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הטונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול אחת בלבד.

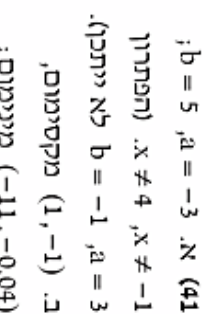
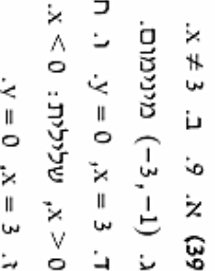
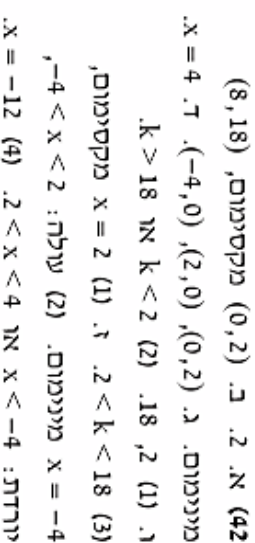
40) הישר $x = -1$ הוא איסימפטוטה אנכית של הטונקציה $f(x) = \frac{-x}{x^2-x+a}$.

- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הטונקציה.
- הראה שלפונקציה אין נקודות קיצון.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הטונקציה.
- מצא את האיסימפטוטות של הטונקציה המאונכות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הטונקציה.
- מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הטונקציה.

23. $\star$ ה. שרטט בצורה כללית גרף של הפונקציה $|f(x)|$.

41) לטונקציה $f(x) = \frac{x+b}{x^2+ax-4}$ יש נקודת קיצון בנקודה $(1, -1)$.

- מצא את a ו- b ואת תחום ההגדרה של הטונקציה.
 - מצא את נקודות הקיצון של הטונקציה ואת תחומי העלייה והירידה.
 - מצא את האיסימפטוטות של הטונקציה המאונכות לצירים.
 - מצא את נקודות החיתוך של הטונקציה עם הצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הטונקציה.
 - מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הטונקציה.
24. $\star$ 1. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.


$$-11 \leq x \leq 11, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 4$$


2. **THEORY**

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילית לצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

44 שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-y^2}$ בנקודה $x=1$ הוא $\frac{2}{3}$. חשור

b-1 a MN NYN .N

עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, הסימפטוטר אנכית).

ד. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפרקציה.

$$-1 < k < -\frac{1}{2} \quad (2) \quad k > -\frac{1}{2} \quad (1)$$

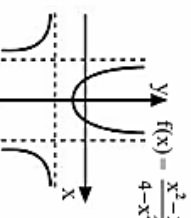
★



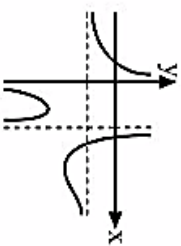
הצירים: $(0, -\frac{1}{4})$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, \frac{1}{4})$. נקודות קיצון: $(0, -\frac{1}{4})$

$x < -2$, איסמפטוטות אנכיות: $x = 2$, $x = -2$, $x = 0$. חיוניות:

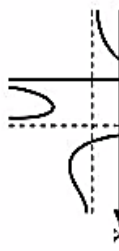
אם $x > 2$, ה. (1) שתיים. (2) אף נקודה. ו. $c = 3$.

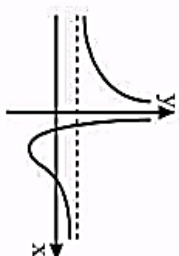


שיעור התלמידים המצליחים

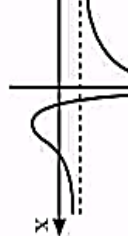


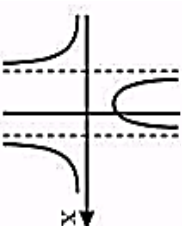
בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{12-x^2}{x^2-3x}$ (5)

- 
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. מצא את האיסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- ו. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם האיסימפטוטה האופקית שלה.
- ז. מצא את האיסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- ח. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
- ט. מצא את התחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.
- י. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$. מצא עפ"י החקירה של $f(x)$ את הנקודות בהן העזרת של $g(x)$ מתאפסת.
- יא. $h(x)$ היא פונקציה המקיימת: $h(x) = \frac{1}{f(x)}$. מצא עפ"י שעיף ד' את האיסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $h(x)$ ועפ"י שעיף ב' את נקודות הקיצון שלה.



3) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}$

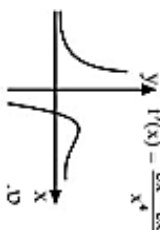
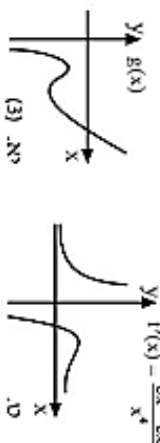
- 
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 - ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - ה. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
 - ו. מצא את התחום שבו הפונקציה שלילית.
 - ז. מצא את התחום שבו הפונקציה שלילית וגם הנגזרת שלה שלילית.
 - ח. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
 - ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
 - י. אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיק נקודת פיתול אחת.
 - י. הראה שאין תחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.
 - יא. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 0$.
 - (1) מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.
 - (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
 - (3) ידוע שהפונקציה $g(x)$ חתכת את ציר ה- x בנקודה ששיעור ה- x שלה בקירוב הוא $x = 4.071$ ונקודות הקיצון שלה נמצאות מתחת לציר ה- x . שרטט בצורה כללית את הגרף של $g(x)$.



(4) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3}$

- א. מצא את תחום ההדגה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
(המשך התיגיל בעמ' הבא)

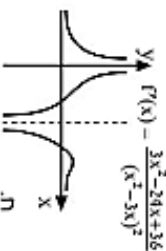
(המשדך הותרג'ל בעמי רמא)



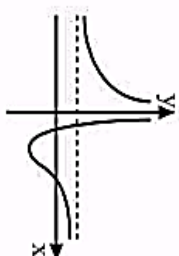
על־מ. 3. מנימים. $(1, -1)$. ב. $x \neq 0$. נ. $(3, 0)$. $x > 1$ או $x < 0$. $0 < x < 1$: יורד: $x > 1$ או $x < 0$. $y = 3$, $x = 0$. ה. $(-\frac{2}{3}, 0)$, $(2, 0)$. ד. $x = 0$. ו. $-\frac{2}{3} < x < 1$. ז. $\frac{2}{3} < x < 2$. ו. $x = 2$. מנימים, $x = \frac{2}{3}$ (1). נ. $y = 0$. $x > 2$ או $0 < x < \frac{2}{3}$: עולה: (2) $x > 2$ או $0 < x < \frac{2}{3}$. מנימים. יורד: $x < 2$ או $x < \frac{2}{3}$.

-

$x < -3$: $x \neq -3$, $x \neq 1$, N (4)
 .מקסימום $(-1, 1)$ ב.
 $x < -3$: $x > 1$ או $-1 < x < 1$: עולה ג.
 $x = -3$, $x = 1$, $\frac{1}{2}$ (0, $1\frac{1}{2}$). ד.
 $x = -3$: $x < x < -1$ או $-1 < x < 1$: י.
 $x = -3$, $x = 1$: מקסימום $(-1, -1)$. $y = 0$.
 $x = 3$ (3). $x > 1$: יורדת (2). ט. $y = 0$.



(6, -1\frac{1}{2}), מקסימום (2, -4) ב. $x \neq 3$, $x \neq 0$, x (5)
 $x > 6$ ו- $0 < x < 2$ ו- $x < 0$: עקלה ב. מקסימום.
 $(-\sqrt{12}, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$ ג. $3 < x < 6$ ו- $2 < x < 3$: עקרות.
 $x = 3$, $x = 0$ ד. $(4, -1)$ ה. $y = -1$, $x = 3$, $x = 0$ ו. $x = 3$, $x = 0$ ז. $(-\sqrt{12}, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$ ח. $2 < x < 3$ ט. $y = 0$
 $(6, \frac{15}{2})$, $(2, 16)$ י. $(-\sqrt{12}, 0)$, $(\sqrt{12}, 0)$ יא. $x = -\sqrt{12}$, $x = \sqrt{12}$ יב. מקסימום.
 $(6, -\frac{3}{4})$, מקסימום (2, -\frac{1}{4}) יג. $x = -\sqrt{12}$, $x = \sqrt{12}$ יד. מקסימום.



3) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2}$

- ג. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ו. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ז. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לציר.
- ח. מצא את התחום שבו הפונקציה שלילית.
- ט. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת.
- י. הראה שאין תחום שבו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם $f(x)$ שלפונקציה המקסימית $g(x) = f(x)$ בתחום $x \in [0, 4.071]$ נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ חותכת את ציר ה- x בנקודות הקיצון שלה נמצאות כללית את הגרף של $g(x)$.
- בצורך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{-4}{x^2 + 2x - 3}$
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- (חמשד התרגיל בצמיד הבא)

$$.h(x) = \frac{4}{x^2 + 2x - 3}$$

★ 1. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.

- ★ ח. שרטט בצורה כללית, עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$, את הגרף של הפונקציה $f'(x)$.
★ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.
★ ט. $g'(x) = f(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$ בתחום $x > 1$.

★ ט. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$

(1) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין נקודות קיצון.

(2) מוצא את תחומי העלייה והירידה (אם יש כאלה) של הפונקציה $f(x)$.

(3) ישר ששיפועו $-\frac{1}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה- x של נקודת

ההשקפה

- 12) א. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה $y = 3\sqrt{x^2+5}$ שהמשיק בה מקביל לשר $y = 2x$.
 ב. מצא את משוואת המשיק הנ"ל.

נתון : משיק יוצר זווית 45° עם כיוון החיובי של ציר ה-x
שיפוע המשיק שווה 1
נתון : משיק יוצר זווית 135° עם כיוון החיובי של ציר ה-x
שיפוע המשיק שווה (-1)

- 15) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{x} + ax$ בנקודה $x = 1$ הוא $-\frac{1}{2}$.
 א. מצא את a. ב. מצא את משוואת המשיק.

בעמוד זה – תר זוגיים

- 16) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = ax - a\sqrt{x}$ בנקודה $x = 4$ הוא $\frac{3}{4}$.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את הנקודה על גרף הפונקציה שהמשיק בה יוצר זווית של 135° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.
 ג. האם יש נקודה על גרף הפונקציה שהמשיק בה יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה-x? נמק.
 ד. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת $g'(x) = f(x)$. ישר ששיפועו 6 משיק לגרף הפונקציה $g(x)$. מצא את שיעור ה-x של נקודת ההשקה.



- 17) ישר ששיפועו -2 משיק לגרף הפונקציה $y = 8\sqrt{-x} + a$ בנקודה ששיעור ה-y שלה הוא 6.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את משוואת המשיק.
 18) הישר $y = \frac{1}{4}x + 2$ משיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{2x} + a$. מצא את נקודת ההשקה ואת a.

- 23) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{ax^2+b}$ בנקודה $(2, 3)$ הוא $\frac{2}{3}$.
 מצא את הפונקציה.

- 24) לגרף הפונקציה $y = \sqrt{ax+b}$ ($a > 0, b > 0$) העבירו משיק בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. המשיק חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x = -6$.
 מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

- 32) משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{ax} + b$ בנקודה שבה $x = 4$ היא $y = \frac{3}{4}x + 3$.
 א. מצא את a ו-b.
 ב. מצא את משוואת הישר המאונך למשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

- 33) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{ax}$ בנקודה $x = 3$ הוא $\frac{1}{2}$.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $y = \sqrt{ax}$ בנקודה $x = -5$ הוא $-\frac{1}{2}$.

- 34) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x+a}}$ בנקודה $x = -5$ הוא $-\frac{1}{2}$.
 א. מצא את a.
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה שעובר דרך ראשית הצירים.

- 35) הישר $y = x - 6a$ חותך את הפונקציה $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$) בנקודה A.
 מצא את a אם המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A עובר בנקודה $(-12, 1)$.

- 12) א. $(2, 9)$. ב. $2x + 5$. ג. -1 . ד. $-\frac{1}{2}$. ה. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. ו. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. ז. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. ח. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. ט. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. י. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
 20) א. $y = 6x - 11$. ב. $y = -2x - 2$. ג. $y = -2x - 2$. ד. $y = -2x - 2$. ה. $y = -2x - 2$. ו. $y = -2x - 2$. ז. $y = -2x - 2$. ח. $y = -2x - 2$. ט. $y = -2x - 2$. י. $y = -2x - 2$.
 23) א. $b = -3$. ב. $a = 4$. ג. $a = 4$. ד. $a = 4$. ה. $a = 4$. ו. $a = 4$. ז. $a = 4$. ח. $a = 4$. ט. $a = 4$. י. $a = 4$.
 26) א. $y = 2x + 1$. ב. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ג. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ד. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ה. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ו. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ז. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ח. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. ט. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$. י. $y = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{3}$.
 32) א. $a = 9$. ב. $a = 9$. ג. $a = 9$. ד. $a = 9$. ה. $a = 9$. ו. $a = 9$. ז. $a = 9$. ח. $a = 9$. ט. $a = 9$. י. $a = 9$.
 34) א. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ב. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ג. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ד. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ה. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ו. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ז. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ח. $y = \frac{3}{4}x + 1$. ט. $y = \frac{3}{4}x + 1$. י. $y = \frac{3}{4}x + 1$.
 35) א. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ב. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ג. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ד. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ה. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ו. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ז. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ח. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. ט. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$. י. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$.

תרגילים

(אסימפטוטות המאונכות לצירים – פונקציות עם שורשים)

אסימפטוטות המאונכות לצירים – ללא פרמטרים (פונקציות עם שורשים)

מצא לגבי הפונקציות הבאות:

(א) את תחום ההגדרה. (ב) את האסימפטוטות המאונכות לצירים.

$$(1) \quad y = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6} \quad (2) \quad y = \frac{3x}{x-2\sqrt{x}} \quad (3) \quad y = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}$$

$$(4) \quad y = \sqrt{\frac{9x}{x+6}} \quad (5) \quad y = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} \quad (6) \quad y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x}$$

$$(7) \quad y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad (8) \quad y = \frac{4x+2}{\sqrt{x^2-1}} \quad (9) \quad y = \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-9}}$$

(10) מצא את נקודת הקיצון ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה

$$y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

בעמוד זה – תרגילים

אסימפטוטות המאונכות לצירים – עם פרמטרים (פונקציות עם שורשים)

$$(11) \quad \text{לפונקציה } y = \frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2} \quad \text{יש נקודת קיצון פנימית ב-} x = 2.$$

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה.

$$(12) \quad \text{לפונקציה } y = \frac{x^2}{(\sqrt{x}-a)^2} \quad \text{יש נקודת קיצון ב-} x = 16.$$

א. מצא את a ואת נקודת הקיצון.

ב. האם לפונקציה יש נקודת קיצון נוספת?

ג. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

אסימפטוטות המאונכות לצירים – פונקציות עם שורשים

בסעיף זה נרדן בפונקציות עם שורש ריבועי שיש להן אסימפטוטות המאונכות לצירים.

דוגמא:

$$f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{לפונקציה}$$

פתרון:

אסימפטוטות אנכיות – אם נשווה את המכנה לאפס נקבל את הפתרונות $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. פתרונות אלה לא מאפסים את המונה ולכן האסימפטוטות האנכיות הן: $x = 2$, $x = -2$.

אסימפטוטות אופקיות – להבדיל מהמצב בפונקציות רציונאליות שבהן היתרה אסימפטוטות אופקיות אחת, כאן ייתכן שיש שתי אסימפטוטות אופקיות כפי שנראה מיד. נשים לב

שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x > 2$ או $x < -2$. נוסף לכך, עבור $x > 2$ נחלק

ערכי הפונקציה הם חיוביים ואילו עבור $x < -2$ ערכי הפונקציה הם שליליים. נחלק את המונה והמכנה בחוקה הגבוהה ביותר, שהיא x, עבור $x > 2$ נקבל:

$$f(x) = \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

קל לראות שאם $x \rightarrow +\infty$ או ערך הפונקציה שואף ל-3.

נעבור להישוב עבור $x < -2$. הפעם x הוא מספר שלילי ולכן כאשר מכניסים את x לתוך השורש הסימן לפני השורש הופך לשלילי. נקבל:

$$f(x) = \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}} = -\frac{3}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}} = -\frac{3}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}$$

הפעם אם $x \rightarrow -\infty$ או ערך הפונקציה שואף ל-3-.

לסיכום: לפונקציה $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4}}$ יש ארבע אסימפטוטות המאונכות לצירים והן:

שתי אסימפטוטות אנכיות – $x = 2$, $x = -2$.

שתי אסימפטוטות אופקיות – עבור $x > 2$ האסימפטוטה היא $y = 3$ ועבור $x < -2$ האסימפטוטה היא $y = -3$.

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא איסימפטוטות מקבילות לצירים:

22. $y = \sqrt{9x-1}$ 21. $y = \frac{2x+3}{(\sqrt{x}-1)^2}$ 20. $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{3x}+8}$

25. $y = \frac{3x-15}{\sqrt{25-x^2}}$ 24. $y = 2 + \frac{3x}{x\sqrt{x}-1}$ 23. ★ $y = \frac{3x-15}{\sqrt{25-x^2}}$

24. הישר $x=3$ הוא איסימפטוטה של הפונקציה $y = 3 - \frac{\sqrt{x^2+25}}{bx-6}$

- א. מצא את הערך של b .
ב. מצא את האיסימפטוטות האחרות של הפונקציה.

25. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-a}}$

גוף הפונקציה חותך את האיסימפטוטה האופקית שלו, הנמצאת מתחת לציר ה- x , בנקודה שבה $x = -12$.

- א. מצא את הערך של a .
ב. האם גוף הפונקציה חותך גם את האיסימפטוטה האופקית, הנמצאת מעל ציר ה- x ? נמק.

26. נתונה הפונקציה $f(x) = a + \frac{3x}{\sqrt{x^2+25}}$

אחת האיסימפטוטות של הפונקציה היא הישר $y=2$.
א. מצא את הערך של a (רשום את שתי האפשרויות).

ב. עבור כל אחד מערכי a שמצאת בסעיף א' מצא את האיסימפטוטה האופקית הנוספת של הפונקציה.

1. א. $y=2, x=1$ 21. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 20. $y=8, y=4$ 19. $y=2, y=4$ 18. אין.

2. $x=2, y=3$ 23. $x=1, y=2$ 24. $x=-2, y=1$ 25. $y=-1, x=-5$

2. א. $y=2, x=2$ 2. ב. $y=2\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{2}$ 27. $y=3\frac{1}{2}$ 24. ב. $y=2\frac{1}{2}$ 28. א. $y=5$ 21. א. $y=-1$ 8. $y=8$

13. אחת מהאיסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $y = 2 + \frac{4x}{\sqrt{x^2+a}}$ חותכת את

הישר $y = -3x+5$ בנקודה ששטור ה- y שלה הוא -4 .

- א. מצא את a .
ב. מצא את שאר האיסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.

היעור $a > 0$) במידת הצורך ומצא את האיסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות הבאות:

14. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-a}$ 15. $y = \frac{\sqrt{x+a}}{x}$ 16. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

17. $y = \frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 18. $y = \frac{2x}{\sqrt{x^2-2ax}} + 1$ 19. $y = \frac{x^2+x}{\sqrt{x^3+ax^2}}$

תשובות (איסימפטוטות המאונכות לצירים – פונקציות עם שורשים):

1. א. $x > 6$ ב. $x = 6$ ג. $x = 2$ 2. א. $x > 0$ ב. $x \neq 4$ ג. $x = 3$

3. א. $-4 \leq x \leq 4$ ב. $x \neq 0$ ג. $x = 0$ 4. א. $x \geq 0$ ב. $x < -6$ ג. $x = -6$ 5. א. $x > 2$ ב. $x \leq 0$ ג. $-2 < x \leq 2$

6. א. $x \neq 0$ ב. $x = 0$ 6. $y = 0$ 7. א. $x > 2$ ב. $x = -2$ 8. א. $x < -1$ ב. $x > 1$

9. א. $x = -1$ ב. $x = 4$ ג. $y = -4$ 9. א. $x < -3$ ב. $x > 3$ ג. $x = -3$ 2. א. $x = 2$ ב. $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -2)$ מקסימום

10. $y = -2$ 11. א. $x = 2$ 12. א. $a = 2$ 12. א. $a = 2$ 12. א. $a = 2$ 12. א. $a = 2$

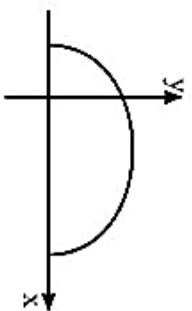
13. א. $x = 4$ 13. א. $x = 4$ 13. א. $x = 4$ 13. א. $x = 4$ 13. א. $x = 4$

14. $y = -2$ 14. $y = -2$ 14. $y = -2$ 14. $y = -2$ 14. $y = -2$

15. $x = a$ 15. $x = a$ 15. $x = a$ 15. $x = a$ 15. $x = a$

16. $y = 6$ 16. $y = 6$ 16. $y = 6$ 16. $y = 6$ 16. $y = 6$

17. $x = -a$ 17. $x = -a$ 17. $x = -a$ 17. $x = -a$ 17. $x = -a$



3) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:

(1) בנקודה אחת.

(2) בשתי נקודות.

(3) באף נקודה.

★ 1. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $\frac{1}{f(x)} = g(x)$ מצא עפ"י התשובה של סעיף ד'

את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $g(x)$. נמק.

★ 2. מצא עפ"י התשובה של סעיף ב' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

★ 3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = \frac{x}{2 - \sqrt{x}}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- ה. מצא את התחום שבו שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה הם חיוביים והפונקציה היא שלילית.

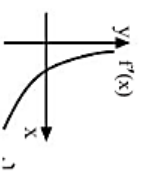
★ 1. מצא לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $-\frac{x}{2 - \sqrt{x}} \leq -8$.

★ 2. שרטט את הגרף של הפונקציה $|f(x)|$ עפ"י הגרף של הפונקציה $f(x)$.

★ 3. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x) = (f(x))^2$. מצא את הנקודות עבורן מתקיים:

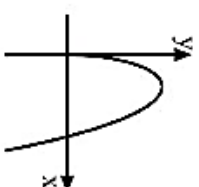
$g'(x) = 0$

תשובות (חקירת פונקציה – פונקציות עם שורשים):



- 1) א. $x \geq 0$. ב. $(0, 0)$ מקסימום, $(4, 12)$ מקסימום, יורדת: $0 < x < 4$. ג. עולה: $0 < x < 4$.
- 2) א. $x > 4$. ב. $(0, 0)$, $(4, -12)$ מקסימום, $x > 4$ יורדת: $x > 4$.
- 3) א. $x > 4$. ב. $(0, 0)$, $(4, -12)$ מקסימום, $x > 4$ יורדת: $x > 4$.

- 1) א. $x \geq 0$. ב. $(0, 0)$, $(4, -12)$ מקסימום, $x > 4$ יורדת: $0 < x < 4$. ג. עולה: $0 < x < 4$.
- 2) א. $x > 4$. ב. $(0, 0)$, $(4, -12)$ מקסימום, $x > 4$ יורדת: $x > 4$.
- 3) א. $x > 4$. ב. $(0, 0)$, $(4, -12)$ מקסימום, $x > 4$ יורדת: $x > 4$.



חקירת פונקציה עם גרף נתון – פונקציות עם שורשים

הערה: ראה גם תרגילים 15 – 1 החל מעמ' 155.

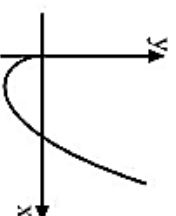
1) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = 8\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. נתונה פונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x) = -f(x)$.

היעור בתשובתך לסעיף ב' ונמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

★ 1. היעור בגרף של הפונקציה $f(x)$ ושרטט גרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

★ 2. מצא את התחום בו הפונקציה $f'(x)$ שלילית וגם הפונקציה $f''(x)$ שלילית.



- 1) בציר מתואר גרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ו. מצא לאילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה:
- 1) בנקודה אחת. 2) בשתי נקודות. 3) באף נקודה.

2. מצא את התחום בו פונקציה $f(x)$ היא שלילית אבל הנגזרת שלה $f'(x)$ היא חיובית.

★ 3. ח. $g(x)$ היא פונקציה המקיימת: $g'(x) = f(x)$. מצא את שיעור $g(x)$ של נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה.

★ 4. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$. נל- $f(x)$ ו- $g(x)$ אותו תחום הגדרה.

★ 5. מעבירים משיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה על הגרף שבה $x = 4$. מצא את שיפוע המשיק.

20) לפונקציה $y = \sqrt{-x^3 + 2x^2 + 4x}$ יש נקודת קיצון פנימית בנקודה $x = 3$.

- מצא את a .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

22) נתון שברביע הראשון הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + b}{\sqrt{x^2 - 1}}$ שולה בתחום $x > \sqrt{2}$ ויורדת בתחום $1 < x < \sqrt{2}$.

- מצא את הפונקציה.
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הפונקציה $f'(x)$ עם ציר ה- x .

23) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{bx^2-2x}}$ אסימפטוטה אופקית של הפונקציה הותכת

- מצא את a ו- b .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מחן האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה?
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את התחום שבו $f(x)$ שלילית וגם $f'(x)$ שלילית.

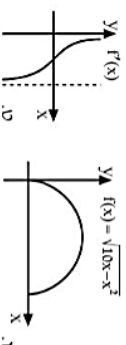
הקיות פונקציה עם מציאת פרמטרים – פונקציות עם שורשים

17) לפונקציה $f(x) = \sqrt{bx - x^2}$ יש נקודת קיצון פנימית בנקודה $x = 5$.

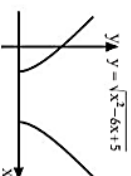
- מצא את b .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא לאילו ערכי a הישר $y = a$ חותך את הפונקציה:
- באף נקודה. (2) בנקודה אחת. (3) בשתי נקודות.
- מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f'(x)$.

18) לפונקציה $y = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ יש נקודת קיצון בקצה תחום ההגדרה בנקודה $x = 5$.

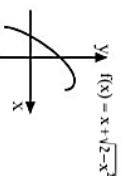
- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



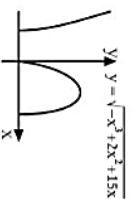
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את a ואת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{b\sqrt{x}-3}$ שפועל המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא -2.5 .

- מצא את שני הערכים האפשריים של b .
- הצב $b = f(x)$ את הערך הקטן משיג הערכים של b ומצא:
 - תחום הגדרה.
 - נקודות חיתוך עם הצירים.
 - תחומי עלייה וירידה.
 - נקודות קיצון.
 - אסימפטוטה אנכית לציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- היא פונקציה המקיימת: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ מצא את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{2\sqrt{x}-x}$ ישר שיפועו 1 משיק לגרף הפונקציה בנקודה $X=9$

- מצא את a ורשום את הפונקציה.
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- הראה שהפונקציה עולה בכל נקודה בתחום הגדרתה.
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- הראה שהפונקציה לא חותכת את האסימפטוטה שלה המקבילה לציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x-a}}{bx^2}$ לפונקציה יש קיצון בנקודה $(8, \frac{\sqrt{2}}{8})$.

- מצא את a ו- b .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות?
- מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- היעזר בגרף של הפונקציה $f(x)$ ושרטט את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם נתון.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{5x+4}{x+\sqrt{x}}$ מצא את:

- תחום ההגדרה.
- האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- נקודות הקיצון.
- תחומי העלייה והירידה.
- שיעורי נקודת החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה המקבילה לציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מצא את תחומי החיבוריות והשליליות של הפונקציה $f'(x)$.

הקירות פונקציות עם שורשים – מציאת פרמטרים (חזרה)

נתונה הפונקציה $f(x) = x - a\sqrt{x} + b$ לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(4, -1)$.

- מצא את a ו- b .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- הוכח את אי השוויון $x - 4\sqrt{x} + 4 \geq 0$ לכל $x \geq 0$ בשתי דרכים:

1) בהסתמך על הקירית הפונקציה הנ"ל.

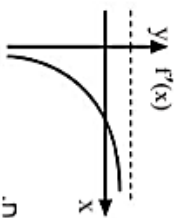
2) מבלי להסתמך על הקירית הפונקציה הנ"ל.

- מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f'(x)$.
- שרטט עי"י הגרף של הפונקציה $f(x)$ את הגרף של הפונקציה $f'(x)$ אם ידוע שלפונקצ $f(x)$ אין נקודות פיתול.

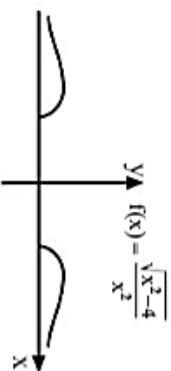
לפונקציה $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$ יש נקודת קיצון פנימית ב- $\sqrt{8}$. $x =$

- מצא את a .
- מצא את תחום ההגדרה.
- מצא את נקודות החיתוך עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון.
- מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- היא פונקציה המקיימת: $g(x) = bf(x) + c$ $g(x) = b > 0$. המקסימום המוחלט של $g(x)$ הוא -2 והמינימום המוחלט שלה הוא -3 . מצא את b ו- c .

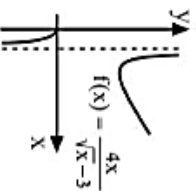




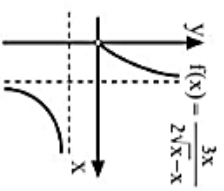
5. א. $x \geq 0$. ב. $a = 4$. ג. $b = 3$. ד. $(0, 3)$, $(1, 0)$, $(9, 0)$.
 ט. עולה: $x > 4$; יורדת:
 י. $0 < x < 4$, $x = 0$, $y = 1$.



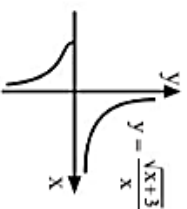
6. א. $a = 4$. ב. $x \geq 2$ או $x \leq -2$. ג. $(2, 0)$, $(-2, 0)$. ד. $(\sqrt{8}, \frac{1}{4})$.
 ז. מקסימום, $(-\sqrt{8}, \frac{1}{4})$, $(2, 0)$ מניימום.
 ח. $y = 0$. י. $b = 4$, $c = -3$.



7. א. $b = 1$ או $b = 4.2$. ב. $(0, 0)$. ג. $x \neq 9$, $x \geq 0$.
 8. (1) $x > 36$: עולה; (2) $x < 36$: יורדת; (3) $x > 36$ או $x < 9$: מניימום, $(36, 48)$; (4) $0 < x < 9$ או $x > 0$: מניימום, $(0, 0)$; (5) $x = 9$: מקסימום, $(9, 0)$.
 ט. $x \neq 9$, $x = 9$: מקסימום, $(9, \frac{1}{48})$.



8. א. $a = 3$. ב. $y = \frac{3x}{2\sqrt{x}-x}$. ג. $x \neq 4$, $x > 0$.
 ד. $x = 4$, $x = -3$. ט. שלילית.



10. א. $a = 3$, $b = 1$. ב. $x \geq -3$, $x \neq 0$. ג. $x > 4$ או $x < -3$.
 ד. מקסימום, $(-3, 0)$. ט. $x = 0$, $y = 0$.

10. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y = \frac{\sqrt{x+a}}{cx}$ בנקודה $(-2, -\frac{1}{2})$ שעל גרף הפונקציה

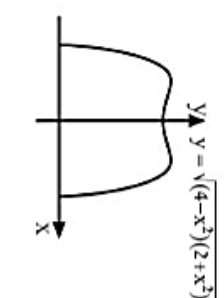
הוא $-\frac{1}{2}$.

- א. מצא את a ו- c .
 ב. מצא את תחום ההגדרה.

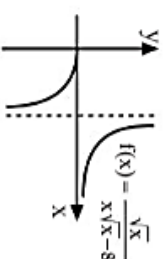
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה והראה שזוהי נקודה פנימית בתחום המדרתה.

- ד. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

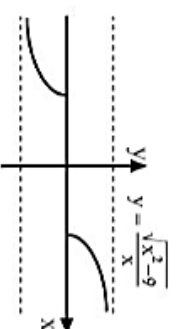
תשובות (תרגילים לחזרה – חקירת פונקציות עם שורשים):



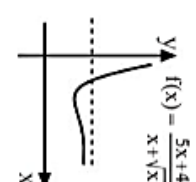
1. א. $-2 \leq x \leq 2$. ב. $(-2, 0)$, $(0, \sqrt{8})$, $(2, 0)$. ג. $(-2, 0)$ מניימום, $(1, 3)$ מקסימום, $(0, \sqrt{8})$ מניימום.
 ז. עולה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 1$; יורדת: $x < -1$ או $1 < x < 2$.
 ח. א. $0 \leq k < 3$ או $k = 3$. ב. $3 < k < \sqrt{8}$. ג. $\sqrt{8} < k < 3$.



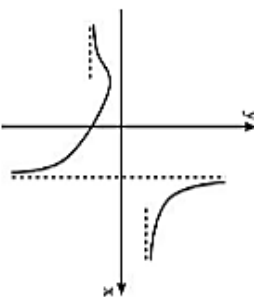
2. א. $x \geq 0$, $x \neq 4$. ב. $(0, 0)$. ג. $x = 4$, $y = 0$. ד. $x = 0$, $y = 0$.
 ז. מקסימום. ח. יורדת: $x > 0$. ט. $x \neq 4$, $0 < x < 4$.



3. א. $x \geq 3$ או $x \leq -3$. ב. עבור $x \geq 3$: $y = 1$; עבור $x \leq -3$: $y = -1$.
 ג. $(3, 0)$ מניימום, $(-3, 0)$ מקסימום. ד. עולה: $x > 3$ או $x < -3$. ט. $x = \frac{1}{2}$.



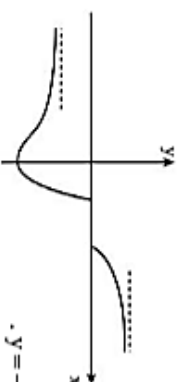
4. א. $x > 0$, $x = 0$, $y = 5$. ב. $x > 4$ או $x < -4$. ג. $(4, 4)$ מניימום. ד. עולה: $x > 4$ או $x < -4$; יורדת: $0 < x < 4$.
 ה. $(\frac{16}{25}, 5)$. ו. חזיבית: $x > 4$. ז. שלילית: $0 < x < 4$.



24. א. $x \neq 2$. ב. $(-2.5; -\frac{\sqrt{5}}{3})$ מקסימום.

ג. עלייה: $x < -2.5$; ירידה: $x > 2$
או $-2.5 < x < 2$

ד. $(0; -\frac{\sqrt{5}}{2})$.
ה. $y = -1$, $x = 1$, $x = 2$.

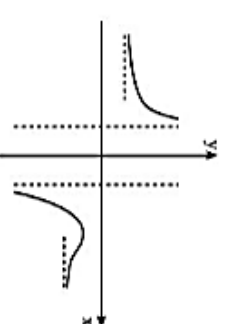


25. א. $x \geq 3$ או $x \leq 1$. ב. $(3; 0)$. ג. $(-\frac{1}{2}; 0)$ מקסימום,

מנימום $(0; -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

ג. עלייה: $x > 3$ או $0 < x < 1$; ירידה: $x < 0$.

ד. $(0; -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(1; 0)$, $(3; 0)$. ה. $y = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.



26. א. $x > 5$ או $x < -5$.

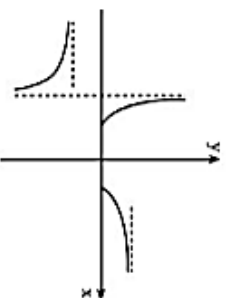
ב. $(25; -\frac{2}{3}\sqrt{6})$ מקסימום.

ג. עלייה: $5 < x < 25$ או $x < -5$;

ירידה: $x > 25$.

ד. אין.

ה. $x = 5$, $x = -5$, $y = 1$, $y = -1$.



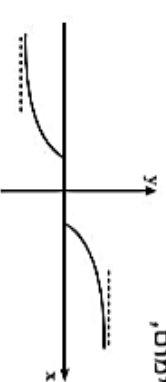
27. א. $x \geq \frac{1}{3}$ או $x \leq -\frac{1}{3}$, $x \neq -2$.

ב. $(\frac{1}{3}; 0)$ מנימום, $(-\frac{1}{3}; 0)$ מנימום.

ג. עלייה: $x > \frac{1}{3}$; ירידה: $-2 < x < -\frac{1}{3}$.

או $x < -2$.

ד. $(\frac{1}{3}; 0)$, $(-\frac{1}{3}; 0)$. ה. $x = -2$, $x = 3$, $y = -3$.



28. א. $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ או $x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. ב. $(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$ מנימום,

מקסימום $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$.

ג. עלייה: $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$ או $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

ירידה: אין. ד. $(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0)$. ה. $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$.

תרגילים 26-31 חשובים במיוחד.

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון (כולל הנקודות שבקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-25}}$$

26

$$y = \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{2x-3}$$

25

$$y = \frac{\sqrt{x^2+5}}{x-2}$$

24

$$y = 2 + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

29

$$y = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x}$$

28

$$y = \frac{\sqrt{9x^2-1}}{x+2}$$

27

$$y = \frac{5x}{x-4\sqrt{x}}$$

30

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

הסבר מדוע יש רק אסימפטוטה אחת המקבילה לציר ה- y .

ג. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום המדרה.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון (כולל הנקודות שבקצה תחום ההגדרה).

ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}$$

33

$$y = \frac{10-2x}{\sqrt{x^2-25}}$$

32

$$y = \frac{x-3}{\sqrt{2x-6}}$$

31

אנליזה - חקירת פונקציה - תרגילים רבי סעיפים.

(א) נתונה פונקציה $f(x) = b - \frac{2-x^2}{1+ax^2}$.

שתיים מהאסימפטוטות של הפונקציה נחתכות בנקודה $(1,2)$.

1. הראה כי $a = -1, b = 3$

2. הציב את ערכי הפרמטרים בפונקציה וחקרו לפי השלבים הבאים:

- תחום הגדרה, אסימפטוטות אנכיות ואופקיות.
- נקודות חיתוך עם הצירים
- נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה

3. שרטט סקיצה של $f(x)$.

4. מהם תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה?

5. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = 3$?

6. (1) מצא לאילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית והנגזרת $f'(x)$ חיובית?

(2) מצא לאילו ערכי x מתקיים: $f'(x) \cdot f(x) > 0$

7. נתונה פונקציה חדשה $m(x) = f(x - 3)$.

(1) מהן נקודות חיתוך של הפונקציה $m(x)$ עם ציר ה- x

(2) מהן שיעורי נק' הקיצון של הפונקציה $m(x)$

(3) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה $m(x)$.

8. נתונה פונקציה חדשה $n(x) = f(x) - 3$.

(1) האם לפונקציה $n(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?

(2) מהן שיעורי נק' הקיצון של הפונקציה $n(x)$?

(3) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה $n(x)$.

9. נתונה פונקציה חדשה $k(x) = 4 \cdot f(x) + c$.

(1) אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $k(x)$ היא ישר $y=10$. מצא את הערך של c .

(2) נתונה פונקציה חדשה $r(x) = -\frac{1}{2} \cdot f(x) + 7$.

מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $r(x)$.

(3) נתונה פונקציה חדשה $t(x) = 2 \cdot f(x) + d$. ידוע כי נקודת קיצון של הפונקציה זו

היא $(0,4)$. מצא את הערך של d .

(4) נתונה פונקציה חדשה $l(x) = q \cdot f(x) + 8$. ידוע כי נקודת קיצון של הפונקציה זו

היא $(0,-3)$. מצא את הערך של q .

★ 10. נתונה פונקציה נתונה $e(x) = -f(x - 1)$. שרטט סקיצה של הפונקציה $e(x)$.

★ 11. נתונה פונקציה $p(x) = [f(x)]^2$. מהי אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $p(x)$?

★ 12. הגדירו פונקציה חדשה $s(x) = |f(x)|$.

(1) שרטט סקיצה של פונקציה הנ"ל

(2) מצא את נקודות הקיצון של $s(x)$ וקבע את סוגן.

★ 13. (1) מהי אסימפטוטה אופקית של גרף הנגזרת של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) שרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$.

★ 14. הפונקציה $f(x)$ היא הנגזרת של $g'(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$.

(1) מצא את שיעורי ה- X של נקודות הקיצון של פונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$

(3) מצא שיעורי ה- X של הנקודות על גרף של $g(x)$ שבהן שיפוע המשיק לגרף

הפונקציה $g(x)$ הוא 3.

(4) שרטט סקיצה של $g(x)$.

(ב) נתונה פונקציה: $f(x) = a + \frac{2x^2 - x - 62}{b - x^2}$

אחד מנקודות הקיצון שלה בנקודה $(2, 0.25)$.

1. הראה כי $a = 2, b = 36$

2. הציב את ערכי הפרמטרים בפונקציה וחקרו לפי השלבים הבאים:

• תחום הגדרה, אסימפטוטות אנכיות ואופקיות.

• נקודות חיתוך עם הצירים

• נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה

3. שרטט סקיצה של $f(x)$.

4. מהם תחומי חיוביות ושליליות של הפונקציה?

5. כמה פתרונות למשוואה $f(x) = -2$? למשוואה $f^2(x) = 1$?

6. נתון ישר: $y = k$. עבור אילו ערכי k הישר חותך את הפרבולה בנקודה אחת? שתי נקודות? אף נקודה?

7. (1) מצא לאילו ערכי X הפונקציה $f(x)$ חיובית והנגזרת $f'(x)$ שלילית?

(2) מצא לאילו ערכי X מתקיים: $f'(x) \cdot f(x) > 0$

8. נתונה פונקציה חדשה $m(x) = f(x + 4)$.

(1) מהן נקודות חיתוך של הפונקציה $m(x)$ עם ציר ה- X

(2) מהן שיעורי נק' הקיצון של הפונקציה $m(x)$

(3) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה $m(x)$.

9. נתונה פונקציה חדשה $n(x) = f(x) + 1$.

(1) האם לפונקציה $n(x)$ יש נקודות חיתוך עם ציר ה- X ?

(2) מהן שיעורי נק' הקיצון של הפונקציה $n(x)$?

(3) מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים של הפונקציה $n(x)$.

10. נתונה פונקציה חדשה $k(x) = 3 \cdot f(x) + c$.

(1) אסימפטוטה אופקית של הפונקציה $k(x)$ היא ישר $Y=4$. מצא את הערך של C .

(2) מה צריך להיות ערך של c על מנת שגרף הפונקציה ישיק לציר ה- X ?

11. נתונה פונקציה חדשה $r(x) = -2 \cdot f(x) - 1$.

מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $r(x)$.

12. נתונה פונקציה חדשה $t(x) = 8 \cdot f(x)$. מצא משוואת הישר העובר דרך נקודת

מינימום של $t(x)$ ודרך נק' החיתוך של גרף הפונקציה $t(x)$ עם ציר ה- X .

13. נתונה פונקציה חדשה $l(x) = q \cdot f(x) + 5$. ידוע כי נקודת קיצון של הפונקציה זו היא

$(2,6)$. מצא את הערך של q .

14. נתונה פונקציה נתונה $e(x) = -f(x-1)$. שרטט סקיצה של הפונקציה $e(x)$.

15. הגדירו פונקציה חדשה $s(x) = |f(x)|$. ★

(1) שרטט סקיצה של פונקציה הנ"ל

(2) מצא את נקודות הקיצון של $s(x)$ וקבע את סוגן.

16. הפונקציה $f(x)$ היא הנגזרת של $g'(x)$, כלומר $g'(x) = f(x)$. ★

(1) מצא את שיעורי ה- X של נקודות הקיצון של פונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

(2) מצא את תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$

(3) מצא שיעורי ה- X של הנקודות על גרף של $g(x)$ שבהן שיפוע המשיק לגרף

הפונקציה $g(x)$ הוא 3. ★

(4) שרטט סקיצה של $g(x)$.

17. (1) מהי אסימפטוטה אופקית של גרף הנגזרת של פונקציית הנגזרת $f'(x)$? ★

(2) שרטט את גרף הנגזרת $f'(x)$.



3. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-9}}$

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $X=5$ היא: $x + 16y = 21$

(א) הראה כי $a = 1, b = -1$

(ב) מצא את תחום הגדרה של הפונקציה

(ג) מצא את אסימפטוטות המקבילות לצירים

(ד) מצא נקודות קיצון ותחומי עליה, ירידה

(ה) מצא נקודות חיתוך עם הצירים (אם יש)

(ו) שרטט סקיצה.

(ז) מצא באיזה תחום מתקיים: $f(x) \cdot f'(x) > 0$

(ח) האם ערכה של הפונקציה יכול להיות (-0.5) ? נמק!

(ט) עבור אילו ערכים חיוביים של X משיקים לגרף הפונקציה עולים?

(י) מצא עבור אילו ערכי p , משיק לגרף הפונקציה $f(x-p)$ המקבילים לציר ה- X

עובר בנקודה בה $X=14$.

(יא) נגדיר פונקציה חדשה: $k(x) = \frac{3-3x}{\sqrt{x^2-9}}$. הפונקציה החדשה מקיימת: $k(x) = m \cdot f(x)$ • מהו ערך של m ?

• שרטט סקיצה של $k(x)$ וציין בה את נקודות הקיצון, אסימפטוטות וחיתוך עם הצירים.

(יב) הפונקציה $h(x) = f(x) - 5$ היא הנגזרת של $g(x)$, כלומר $g'(x) = h(x)$.
(4) סרטט סקיצה של $h(x)$

(5) ציין לגבי $h(x)$: מהן אסימפטוטות לצירים, מהי נק' הקיצון.

סמן ב- a את נק' החיתוך של $h(x)$ עם ציר ה- X , וענה:

(6) כמה נקודות הקיצון יש לפונקציה $g(x)$? נמק את תשובתך.

(7) מצא את תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (לבטא עם a)

(8) קבע את הסוג של נקודות קיצון.

פרק ג' – גיאומטריה

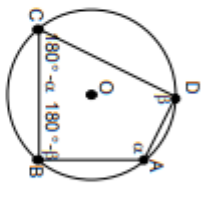
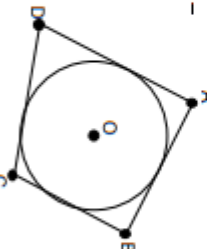
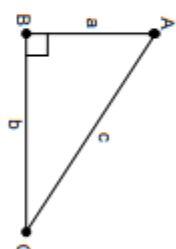
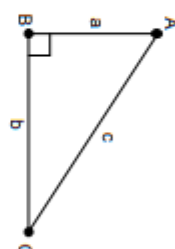
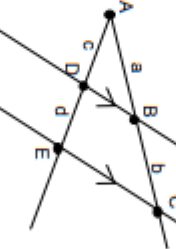
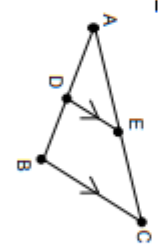
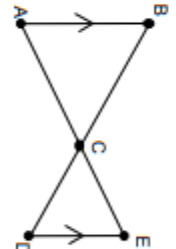
תרגילי חזרה בגיאומטריה מתוך ספר 'גיאומטריה של המישור' בני גורן

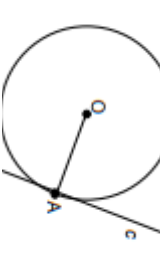
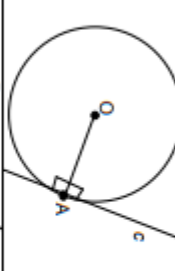
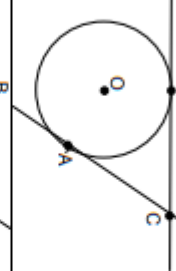
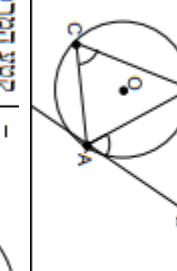
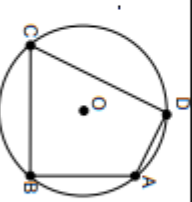
8	166	זוויות במעגל	
12,13,14,17,19,22,25,26,30	167-172		
2,6,8,10,11,12,13,16,18,20	174-180		
23,25,28,29,33,38	181-184		
6,8,11,12,19-23	191-200	משיק למעגל	
40-45, 38	200-201		
העל	213-214	מעגל חסום וחוסם	
הכל	216-217	למידה עצמית של המשפטים	
הכל	220	מתוך הספר	
57,58	222		
16,17,19	237	משפט פיתגורס ושטחים ★	
הכל	238		
הכל	246-247		
הכל פרט ל-17	250		
30-33	254		
20-22, 19*, 13-17	270-270	משפט טאלס ★	
הכל פרט ל-32,34	274-275		
הכל ללא מס' 44	277-278	משפט חוצה זווית	
48,49,51	280		
6-10,16-21,26-29,34-36,41,42	283-285	דמיון משולשים -משפטי דמיון	
לא לפתור עמודים אלה		-קטעים מיוחדים במשולשים דומים	
44,45,47,48,50	295-296	-יחס בין שטחים של משולשים דומים	
הכל ללא תר 56	299-300	-דמיון במרובעים	
הכל ללא 8, 13	301-304	-דמיון במעגל	
ללא 23,	304-313	תרגול עצמי מ-gool תר' 34-41	

משפטים בגיאומטריה

$\angle AOB = 2\angle ACB$		זווית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זווית היקפית הנשענת על אותה הקשת.
$\angle ACB = \angle ADB$		כל הזוויות הדיקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
$\angle AOB = \angle COD$ $\Downarrow$ $AB = CD$		זוויות היקפיות שוות במעגל נשענות על מיתרים שווים.
$\angle ACB = \angle ADB$		כל הזוויות הדיקפיות במעגל הנשענות על אותו מיתר מאותו הצד שוות זו לזו.
$\angle ABC = 90^\circ$ $\Downarrow$ קוטר AC-קוטר המעגל		זווית היקפית בת 90° נשענת על הקוטר.
קוטר AC-קוטר המעגל $\Downarrow$ $\angle ABC = 90^\circ$		זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה.
$\alpha = \beta + \gamma$		זווית פנימית במעגל שווה לסכום שתי הזוויות הדיקפיות הנשענות על הקשתות הכלולות בין שוקי הזווית ובין המשפיות.
$\alpha = \gamma - \beta$		זווית חיצונית למעגל שווה להפדיש שבין שתי הזוויות הדיקפיות הנשענות על הקשתות הכלולות בין שוקי הזווית.

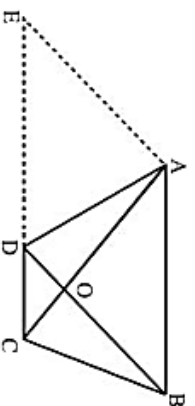
$AB = CD$ $\Downarrow$ $\angle AOB = \angle COD$		על מיתרים שווים במעגל נשענות זוויות מרכזיות שוות זו לזו.
$\angle AOB = \angle COD$ $\Downarrow$ $AB = CD$		במעגל זוויות מרכזיות שוות נשענות על מיתרים שווים.
$OM \perp AB$ $\Downarrow$ $AM = MB$		אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל חוצה את המיתר.
$OM \perp AB$ $\Downarrow$ $\angle AOM = \angle BOM$		אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר.
$OM \perp AB$ $\Downarrow$ $\widehat{AM} = \widehat{BM}$		אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל חוצה את הקשת המתאימה למיתר.
$AB = CD$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ $\Downarrow$ $OE = EF$		מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממוקד המעגל.
$OE = EF$, $OE \perp AB$, $OF \perp CD$ $\Downarrow$ $AB = CD$		מיתרים במעגל הנמצאים במרחקים שווים מהמרכז שווים זה לזה.

אם במרובע יש זוג זוויות נגדיות הווא שסכומן 180° אז ניתן להסוים אותו במעגל.		$\angle BAD + \angle BCD =$ $= \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ $\Downarrow$ ניתן להסוים את מרובע ABCD במעגל O
במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.		$AB + CD = AD + BC$
משפט פיתגורס: בכל משולש ישר זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.		$\angle ABC = 90^\circ$ $\Downarrow$ $a^2 + b^2 = c^2$
אם במשולש שטחי שטחי הריבועים הבנויים על שתי צלעות המשותף שווה לשטח הריבוע הבנוי על הצלע השלישית אז הוא ישר זווית.		$a^2 + b^2 = c^2$ $\Downarrow$ $\angle ABC = 90^\circ$
משפט תלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.		$BD \parallel CE$ $\Downarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
הרחבה ראשונה של משפט תלס: הנקודות D ו-E נמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-AC במשולש ABC. אם $DE \parallel BC$ אז $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.		$BD \parallel CE$ $\Downarrow$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$
הרחבה שנייה של משפט תלס: הקטעים AE ו-BD נחתכים בנקודה C. אם $AB \parallel DE$ אז $\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DE}$.		$AB \parallel DE$ $\Downarrow$ $\frac{AC}{CE} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{DE}$

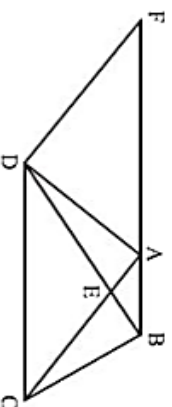
משק למועגל מאונך לרדיוס הנפגש אותו בנקודת ההשקה.		משק למועגל מאונך לרדיוס הנפגש אותו בנקודת ההשקה.
ישר המאונך לרדיוס בקצו הוא משק למועגל.		ישר המשק למועגל הוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
שני משקים למועגל הוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.		הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשקים חוצים את הזווית שבין המשקים.
הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשקים חוצים את הזווית שבין המשקים.		הזווית בין משק למועגל במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על הקשת המתאמה למועגל הכלואה בין המועגל לבין המשק.
קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המועגל המשותף ומאונך לו.		שק D ו-C נקודות חיתוך של מעגלים B ו-A $\Downarrow$ $AB \perp CD, CE=ED$
נקודת ההשקה של שני מעגלים משקים נמצאת על קטע המרכזים אם המעגלים משקים מבחוץ או על המסו אם המעגלים משקים מבפנים.		C נקודת ההשקה של מעגלים B ו-A $\Downarrow$ $C \in AB$
בכל מרובע החסום במעגל סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .		$ABCD$ – מרובע חסום במעגל O $\Downarrow$ $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

הוצי זוויות מתאימות במשולשים דומים מתייחסות זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.		$\angle ABK = \angle C BK = \angle DEG = \angle FEG,$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\frac{BK}{EG} = \frac{AB}{DE}$
תיכונים מתאימים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.		$AK = KD, DG = FG,$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\frac{BK}{EG} = \frac{AB}{DE}$
גבהים מתאימים במשולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.		$BK \perp AC, EG \perp DF,$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\frac{BK}{EG} = \frac{AB}{DE}$
ההיקפים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו יחס הדמיון שבין המשולשים.		$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{AB}{DE}$
שטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כמו ריבוע יחס הדמיון שבין המשולשים.		$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ $\Downarrow$ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}} = \left(\frac{AB}{DE}\right)^2$

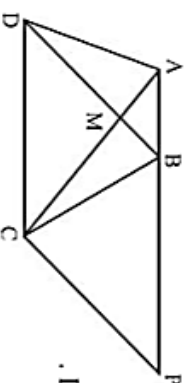
אם שני ישרים מקצים על שוקי זווית קטעים פרופורציוניים אז הם מקבילים זה לזה.		$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\Downarrow$ $BD \parallel CE$
הוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות הכולאות את הזווית.		$\angle CAD = \angle BAD$ $\Downarrow$ $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$
קטע המחבר קודקד במשולש עם הצלע שמולו ומחלק אותה לשני קטעים המתייחסים זה לזה כמו היחס שבין שתי הצלעות האחרות חוצה את הזווית שמול הצלע.		$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}$ $\Downarrow$ $\angle CAD = \angle BAD$
משפט דמיון ראשון: אם שתי צלעות במשולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי צלעות מתאימות במשולש שני והזווית שבין הצלעות שווה בהתאמה אז המשולשים דומים.		$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}, \angle A = \angle D$ $\Downarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
משפט דמיון שני: אם שתי זוויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשתי זוויות במשולש שני אז המשולשים דומים.		$\angle A = \angle D, \angle C = \angle F$ $\Downarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$
משפט דמיון שלישי: אם שתי הצלעות במשולש אחד מתייחסות באותו יחס לשתי הצלעות המתאימות במשולש שני אז המשולשים דומים.		$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ $\Downarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



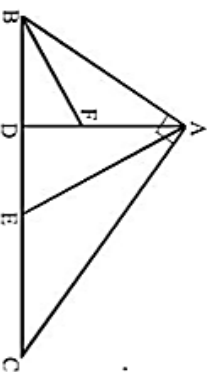
15. בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel CD$),
 $AB = 3 \cdot CD$. אלכסוני הטרפז
 נפגשים בנקודה O . דרך הנקודה A
 מעבירים מקביל ל- BD , החותך
 את המשך הצלע CD בנקודה E .
 נסמן ב- S את שטח המשולש DOC .
 הבע באמצעות S את שטח המרובע $ABCE$.
תשובה: $28 \cdot S$.



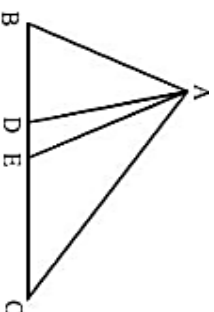
16. בטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$), האלכסונים
 נפגשים בנקודה E . נתון: $AC \parallel DF$,
 $S_{ABE} = 3$, $CE = 3 \cdot AE$.
 חשב את S_{ACDF} .
תשובה: 72 סמ"ר.



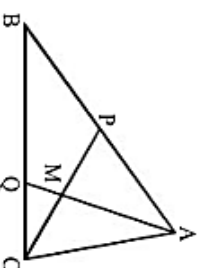
17. המרובע $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel DC$).
 נתון: $PC \parallel BD$, $DC = m \cdot AB$.
 א. הבע באמצעות m את היחס בין שטח
 המקבילית $DBPC$ לשטח המשולש DCM .
 ב. נתון: $S_{DPC} = 3 \cdot S_{DCM}$. מצא את m .
תשובה: א. $\frac{2(m+1)}{m}$. ב. 2.



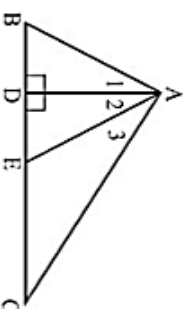
22. המשולש ABC הוא ישר-זווית ($AB \perp AC$).
 AD הוא המובה ליתר BC , AE חוצה את
 הזווית DAC ו- BF חוצה את הזווית ABD .
 א. הוכח: $\triangle ADB \sim \triangle CDA$.
 ב. נתון: 8 ס"מ AE , 6 ס"מ AD ,
 4 ס"מ BD . מהו אורך הקטע BF ?
תשובה: ב. $5\frac{1}{3}$ ס"מ.



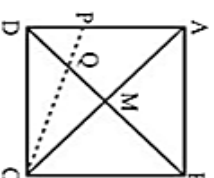
37. במשולש ABC , הקטע AE הוא תיכון
 לצלע BC והקטע AD הוא חוצה הזווית
 של $\angle BAC$. נתון: $AB = \frac{2}{3}AC$.
 הוכח: $S_{ADE} = \frac{1}{5}S_{AEC}$.



38. שטחו של המשולש ABC הוא 210 סמ"ר.
 CP הוא התיכון לצלע AB .
 AQ הוא חוצה-הזווית של $\angle BAC$.
 נתון: 30 ס"מ AB , 20 ס"מ AC .
 חשב את שטח המשולש APM .

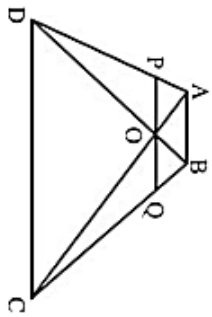


39. במשולש ABC , התיכון AE והמובה AD
 מחלקים את הזווית BAC לשלוש
 זוויות שוות ($\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$).
 הוכח: $\angle BAC = 90^\circ$.

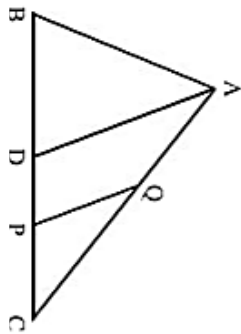


40. המרובע $ABCD$ הוא ריבוע
 שאלכסוניו נפגשים בנקודה M .
 CP חוצה את הזווית ACD
 וחותך את האלכסון BD בנקודה Q .
 הוכח: $AP = 2MQ$.

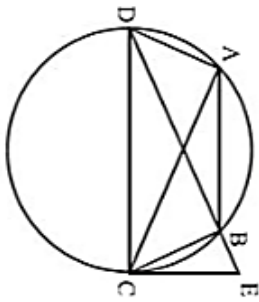
חלק 2 - גיאומטריה



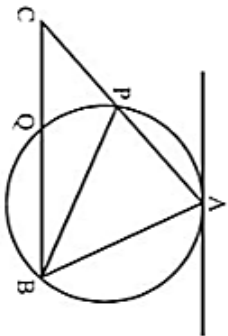
38. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
 נתון: $AB:DC = 1:3$, $PQ \parallel DC$, $AB:DC = 1:3$.
 מצא את היחס $S_{APO}:S_{PQCD}$.
תשובה: 1:15.



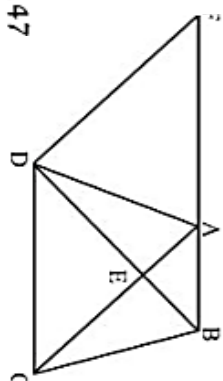
28. במשולש ABC, הנקודות D ו-P נמצאות על הצלע BC והנקודה Q נמצאת על הצלע AC, נתון: $BP = 2PC$, $PQ \parallel AD$, $CQ = \frac{3}{2}AQ$.
 חוכה: $S_{CPQ} = \frac{1}{5} \cdot S_{ABC}$.



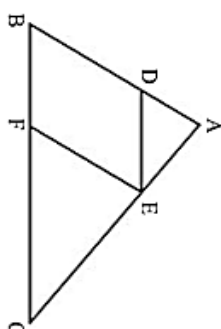
29. המשכי המיתרים AP ו-BQ נפגשים בנקודה C. BC מקביל לשר המשקי למעגל בנקודה A.
 א. חוכה: $AD \cdot AC = AE \cdot CD$.
 ב. נתון: $DE = 25$ ס"מ, $AC = 36$ ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.



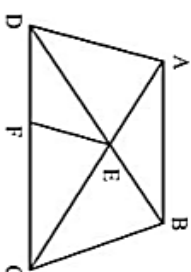
30. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל כך שהנקודה C היא אמצע הקשת DB. המשיק למעגל בנקודה A.
 א. חוכה: $AB^2 = AP \cdot AC$.
 ב. חוכה: אם P אמצע AC, $S_{ABP} = S_{ACP}$.



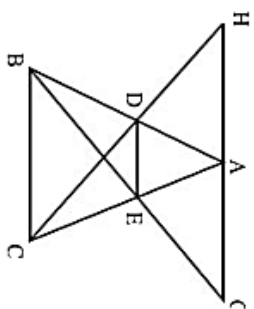
33. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) האלכסונים נחתכים בנקודה E. הנקודה F על המשיק הצלע AB, נתון: $AC \parallel DF$, $S_{DEC} = 24$ סמ"ר, $DC = 2 \cdot AB$.
 א. חשב את S_{AEB} ואת S_{ADF} .
 ב. חשב את S_{ACDF} .



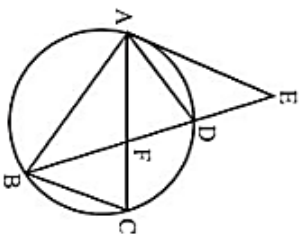
34. במשולש ABC חסומה מקבילית BDEF. נתון: $4 = S_{EAD}$, $EF = 4$ ס"מ.
 א. חשב את אורך הקטע AD.
 ב. נתון גם: $3 = S_{EAD}$.
 חשב את שטח המקבילית BDEF.



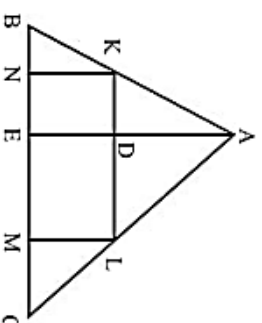
35. בטרפז ABCD ($AB \parallel DC$) האלכסונים נפגשים בנקודה E. נתון: $AD \parallel EF$, $EF = 4$ ס"מ, $S_{CEF} = 9$.
 א. חשב את היחס בין CF ל-CD.
 ב. חשב את היחס בין AB ל-CD.



39. בשרטוט נתון: $DE \parallel BC$. דרך הנקודה A מעבירים ישר המקביל ל-BC וחותך את המשיקי הקטעים BE ו-CD בנקודות G ו-H. נתון: $3 = S_{HAG}$, $DE = 7$ ס"מ, $BC = 16$.
 א. חשב את אורך הקטע AH.
 ב. חשב את היחס $S_{AEG}:S_{AHD}$.



מדינת ישראל



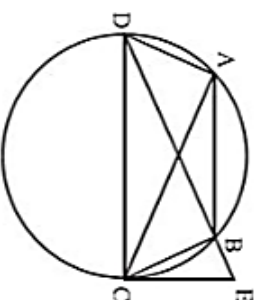
44. במשולש ABC חסום מלבן KLMN.
הנובה AE לצלע BC חותך את צלע
המלבן KL בנקודה D. נתון: $\angle C = 60^\circ$,
 $BC = 8$.

 $\Delta E = 20 \text{ D}, K_L = 2 \text{ KN}$

א. חשב את אורך הקטע AD.

ב. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{AKD}}{S_{KEN}}$. ★

תשובה: א. 3.125. ב. $\frac{25}{9}$.



28. הטרפז $ABCD$ ($AB \parallel DC$) חסום במעגל.

המשיך למעגל בנקודה C נפגש בנקודה E

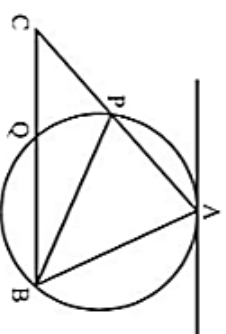
עם המשך האלכסון DB.

CD הוא קונטר המעגל.

א. הוכח: $\Delta DAC \sim \Delta ECD$:

ב. נתון: $AC = 25$ ס"מ, $DE = 36$ ס"מ.

חשב את רדיוס המעגל.



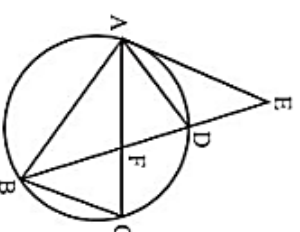
29. המשכי המיתרים AP ו- BQ נפגשים

בנקודה C, BC מקביל לישר

המשיך למעגל בנקודה א.

א. $AB^2 = AP \cdot AC$: הוכח.

ב. ה'ר"ח: אם P אמצע AC,

$$\cdot S_{ABP} = S_{BCP} \quad \text{in}$$


30. הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על מעגל

כך שהנקודה C היא אמצע הקשת DB.

המשיך למעגל בנקודה A נפגש

עם המשך המיגר BD בנקודה E.

א. $DE \cdot AB = AD \cdot AE$; הוכח.

1. $BC^2 = AC \cdot CF$; נתון

מילון מושגים – סדרה חשבונית

הגדרה: סדרה בה קיים הפרש קבוע בין 2 איברים עוקבים שלא תלוי במקום של איברים אלה, היא סדרה חשבונית.

$$d = a_{n+1} - a_n$$

נוסחא למציאת איבר הנמצא במקום n בסדרה חשבונית היא: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

איך מוכיחים כי סדרה חשבונית?

דוגמא 1:

דוגמא 2:

סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 3$, $a_1 = -13$.
 ב. הוכח שהסדרה היא חשבונית ורשום את הפרשה.
 כדי להוכיח כי סדרה היא חשבונית, נבדוק הפרש בין שני איברים עוקבים:

$$a_{n+1} - a_n = 3 \text{ נעביר אגף בכלל נסיגה הנתון:}$$

ההפרש שקיבלנו הוא מס' קבוע שלא תלוי ב- n

לכן, סדרה היא חשבונית והפרשה $d = 3$

כלל: כדי להוכיח שסדרה היא סדרה חשבונית צריך להראות שההפרש בין כל איבר (פרט לראשון) לקודמו הוא קבוע, כלומר יש להוכיח שההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע ואינו תלוי ב- n .

דוגמא:

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי הנוסחה $a_n = 3n + 1$.

ב. הוכח שהסדרה היא חשבונית ורשום את הפרשה.

פתרון:

ב. על פי הנתון: $a_n = 3n + 1$. כדי להביע את a_{n+1} , נציב בנוסחה $(n+1)$ בכל מקום שבו מופיע n . נקבל: $a_{n+1} = 3(n+1) + 1$ ומכאן $a_{n+1} = 3n + 4$.
 נחשב את ההפרש $a_{n+1} - a_n$: $a_{n+1} - a_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3$.
 קיבלנו $a_{n+1} - a_n = 3$, כלומר ההפרש $a_{n+1} - a_n$ הוא קבוע ושווה ל-3 ולכן הסדרה היא סדרה חשבונית והפרשה 3.

דוגמא 3:

כדי להוכיח כי סדרה היא חשבונית, נבדוק הפרש בין שני איברים עוקבים:

$$a_{n+1} - a_n$$

הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה היא $S_n = 3n^2 + 4n$.

ב. הוכח שהסדרה היא חשבונית ורשום את הפרשה.

פתרון:

לכן, כאשר נתונה נוסחה לסכום S_n של סדרה כלשהי ניתן למצוא נוסחה לאיבר הכללי a_n על-פי הקשר: $a_n = S_n - S_{n-1}$ ($n \geq 2$)

על פי הנתון: $S_n = 3n^2 + 4n$

$$S_{n-1} = 3(n-1)^2 + 4(n-1)$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3n^2 + 4n) - (3n^2 - 2n - 1) = 6n + 1$$

איבר כללי של הסדרה הוא: $a_n = 6n + 1$

נוכיח כי סדרה חשבונית ע"י בדיקה של הפרש בין 2 איברים עוקבים

$$a_{n+1} - a_n = 6(n+1) + 1 - (6n + 1)$$

$$a_{n+1} - a_n = 6n + 6 + 1 - 6n - 1$$

$$a_{n+1} - a_n = 6$$

ההפרש שקיבלנו הוא מס' קבוע שלא תלוי ב- n לכן, סדרה היא חשבונית והפרשה $d = 6$

סכומים חלקיים של סידרה חשבונית

נוסחא למציאת **סכום** של n איברים ראשונים בסידרה חשבונית היא :

$$S_n = [2a_1 + (n-1)d] \cdot \frac{n}{2}$$

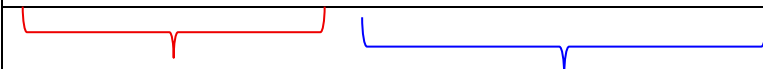
כאשר : a_1 הוא האיבר שממנו מתחילים לחבר

d הוא הפרש של סידרה או של סידרה חלקית (יכול להיות שונה)

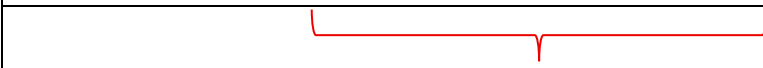
n מספר איברים שמחברים

סכום איברים ראשונים, אחרונים :

דוגמא 1: בסידרה $2n$ איברים

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots, a_{2n}$	n איברים אחרונים	
	$a_{n+1},$	איבר I
n איברים ראשונים n איברים אחרונים	d	הפרש
	n	כמה מחברים

דוגמא 2: בסידרה n איברים

$n-3$ איברים ראשונים	$n-3$ איברים אחרונים	
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$	$a_4,$	איבר I
	d	הפרש
$n-3$ איברים אחרונים	n	כמה מחברים

סכום איברים הנמצאים במקומות זוגיים / אי זוגיים :

דוגמא 1: בסידרה $2n$ איברים

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n-3}, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}$	n איברים במקומות האי זוגיים	
	$a_1,$	איבר I
$2d$ הפרש $2d$ הפרש	$2d$	הפרש
	n	כמה מחברים

בסידרה $2n$ איברים

$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_{2n-3}, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}$	n איברים במקומות הזוגיים	
	$a_2 = a_1 + d$	איבר I
	$2d$	הפרש
	n	כמה מחברים

בסידרה $2n + 1$ איברים (מס' אי זוגי בסה"כ)

$n + 1$ איברים במקומות האי זוגיים	n איברים במקומות הזוגיים	
a_1	$a_2 = a_1 + d$	איבר I
$2d$	$2d$	הפרש
$n + 1$	n	כמה מחברים

$a_1, a_2, a_3, a_4 \dots, a_{2n-3}, a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$

בסידרה בה מס' זוגי של איברים $2n$:
יש n איברים במקומות זוגיים
ו- n איברים במקומות אי זוגיים

בסידרה בה מס' אי זוגי של איברים $2n + 1$
נוסף איבר שמקומו אי זוגי.
לכן יש $n + 1$ איברים במקומות אי זוגיים

בתרגילים הבאים נתונה הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של סדרה. מצא את הנוסחה ל- a_n (בדוק את נכונותה גם עבור $n=1$) והוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית:

$$S_n = an^2 + bn$$

1. f

$$S_n = -3n^2 + 10n$$

2. g

$$S_n = 5n^2 - 3n$$

3. h

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d .

בונים סדרה חדשה שאיבריה: $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$

א. הבע באמצעות a_1, d את b_n , האיבר במקום ה- n .

ב. הוכח שסדרת b_n היא חשבונית ורשום את הפרשה.

ג. הבע באמצעות a_1, d את הסכום $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$.

תשובה: א. $d - 2a_1 + 2dn$. ב. $b_n = 2a_1 + 2dn$. ג. $n(2a_1 + 2dn)$.

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d .

בונים סדרה חדשה $b_1 = a_1 + a_2, b_2 = a_2 + a_3, b_3 = a_3 + a_4, \dots$

א. הבע באמצעות a_1, d את b_n , האיבר במקום ה- n .

ב. הוכח שסדרת b_n היא חשבונית.

ג. נתון: $a_1 = 6, b_2 = 42$, וסכום n האיברים $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ הוא 1152. מצא את n .

תשובה: א. $3a_1 + 3dn$. ג. 12.

הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה חשבונית שההפרש שלה d .

בונים סדרה חדשה: $b_1 = a_1, b_2 = a_2, b_3 = a_3, \dots$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא חשבונית.

ב. נתון: $a_1 = 1, a_2 = 14, b_3 = 14$. סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots$ הוא 290. מצא את a .

תשובה: ב. 2.

תשובות: 25. א. $3n+5$. ב. $5n-12$. ג. $53-3n$. ד. $-15-4n$. 26. א. $-4, -7, -10, -13$. ב. 3 . ג. 155 . ד. 27 . א. -34 . ב. $a_{16} = 4n+3$. 27. א. $a_1 = 9, a_{n+1} = a_n + 4$. ב. $a_1 = 29, a_{n+1} = a_n - 2$. א. 30 . ב. $d=6, a_1 = -13$. 28. א. $a_1 = 33, d = -4$. ג. $a_1 = 1, d = -1.5$. ב. $a_1 = 10, a_{n+1} = a_n + 7$. 29. א. $a_1 = 9, a_{n+1} = a_n + 4$. ב. $a_1 = 29, a_{n+1} = a_n - 2$. א. 30 . ב. $d=6, a_1 = -13$. 30. א. $a_1 = 33, d = -4$. ג. $a_1 = 1, d = -1.5$. ב. $a_1 = 10, a_{n+1} = a_n + 7$.

נתונה נוסחת האיבר הכללי של סדרה: $a_n = 8 - 3n$.

א. הוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית.

ב. מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים של הסדרה.

ג. מצא את מקומו של איבר בסדרה זו, שקטן ב-5 מסכום כל האיברים שלפניו.

ד. כמה איברים לכל היותר חיבר בסדרה זו אם נתון שסכומם גדול מ-110.

תשובה: א. $13n - 3n^2$. ב. 10 איברים לכל היותר.

נוסחת הסכום של סדרה היא: $S_n = 7n^2 - 3n$.

א. מצא את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה זו ואת האיבר השביעי של הסדרה.

ב. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n של הסדרה.

ג. הוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית.

ד. בסדרה זו 35 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

תשובה: א. 88, 322. ב. $a_n = 14n - 10$. ג. 4356.

סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = -13, a_{n+1} = a_n + 3$.

א. רשום את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח שהסדרה היא חשבונית ורשום את הפרשה.

ג. חשב את האיבר ה-57 בסדרה.

סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = a_n - 5$.

א. חשב את האיבר התשיעי בסדרה.

ב. מצא את מקומו של איבר בסדרה שערכו -69.

סדרה מוגדרת על-ידי כלל הנסיגה: $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 4$.

א. מצא את הנוסחה לאיבר הכללי של הסדרה (נוסחה לפי מקום).

הגדר כל אחת מהסדרות החשבוניות הבאות באמצעות כלל נסיגה:

א. $9, 13, 17, \dots$ ב. $29, 27, 25, \dots$

בתרגילים הבאים נתון האיבר הכללי של סדרה. הוכח שהסדרה היא סדרה חשבונית, ומצא את הפרש הסדרה ואת איבר הראשון.

א. $a_n = 6n - 19$. ב. $a_n = -4n + 37$. ג. $a_n = \frac{1}{2}(5 - 3n)$.

בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים, התפרש הוא 5-
 סכום האיברים שבמקומות הזוגיים קטן ב-95 מסכום האיברים
 שבמקומות האי-זוגיים. מצא כמה איברים יש בסדרה.

תשובה: 38.

בסדרה חשבונית שבה 20 איברים, התפרש הוא 5-
 סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים הוא 450 וסכום האיברים
 שבמקומות הזוגיים הוא 420. מצא כמה איברים יש בסדרה.

תשובה: 12.

בסדרה חשבונית שבה התפרש הוא 14, יש 8 איברים נ"ח הוא מספר
 זוגי. סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא 126 וסכום
 האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 140. כמה איברים בסדרה?
 תשובה: 20.

בסדרה חשבונית שהתפרשה 4- יש 20 איברים. סכום הסדרה קטן
 ב-48 מפעמיים סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.
 מצא כמה איברים בסדרה.
 תשובה: 24.

בסדרה חשבונית עולה 8 איברים. נתון ש-8 הוא מספר זוגי.
 חוכת שסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב- $\frac{1}{2}$
 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

בסדרה חשבונית יש מספר זוגי של איברים. סכום האיברים העומדים
 במקומות האי-זוגיים הוא 108. סכום האיברים העומדים במקומות
 הזוגיים הוא 120. האיבר האחרון בסדרה גדו 22.5 מהאיבר הראשון שון.
 מצא כמה איברים בסדרה.

תשובה: 16.

בסדרה חשבונית, שבה מספר זוגי של איברים, שווה האיבר האחרון לסכום שני האיברים
 האמצעיים.

א. מצא את האיבר הראשון.

ב. מצא את מספר איברי הסדרה אם סכומה גדול פי 7 מהאיבר האחרון.
 $(14, 0)$

בסדרה חשבונית נתון שהאיבר הראשון שווה להפרש הסדרה והאיבר האחרון קטן פי 10
 מסכום כל האיברים שלפניו.

מצא כמה איברים בסדרה. (21)

בסדרה חשבונית יש 20 איברים. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה
 קטן פי 3 מסכום 8 האיברים האחרונים. סכום 16 האיברים הראשונים
 בסדרה הוא 1280. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

תשובה: 5, $a_1 = 10$, $d = 10$.

בסדרה חשבונית שהתפרשה של 5 יש 20 איברים. סכום 8 האיברים
 הראשונים בסדרה הוא 156 וסכום 8 האיברים האחרונים הוא 476.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 ב. מצא כמה איברים יש בסדרה.

תשובה: א. 2. ב. 16.

בסדרה חשבונית שבה 8 איברים, התפרש הוא 6. סכום 2-8 האיברים
 הראשונים בסדרה קטן ב-180 מסכום 2-8 האיברים האחרונים בסדרה.
 מצא כמה איברים יש בסדרה.

תשובה: 17.

בסדרה חשבונית שבה 8 איברים, התפרש הוא 3. סכום 3-8 האיברים
 האחרונים בסדרה גדול ב-198 מסכום 3-8 האיברים הראשונים בסדרה.
 א. מצא כמה איברים יש בסדרה.
 ב. נתון $a_1 = 14$. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

תשובה: א. 25. ב. 600.

בסדרה חשבונית, שהפרשה הוא 2, יש 3 איברים. סכום ה האיברים הראשונים קטן פי $3\frac{1}{3}$ מסכום האיברים הבאים אחרים. האיבר האחרון בסדרה שווה ל-81.

- א. כמה איברים בסדרה?
ב. מצא את סכום כל איברי הסדרה.

תשובה: א. 42 איברים ב. 1680

בסדרה חשבונית 2n איברים. סכום כל איברי הסדרה גדול פי 4 מסכום האיברים הראשונים. סכום האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים בסדרה גדול פי 1.9 מסכום האיברים הראשונים.

- א. מצא את מספר איברי הסדרה.
ב. נתון גם, כי האיבר ה-15 הוא 87.
מצא את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

תשובה: א. 20 איברים ב. 630

ז'לונה הסדרה החשבונית: 6, 10, 14, 18, ...
חשב את הסכום: $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2$.

נחונה סדרה חשבונית בעלת 10 איברים. הפרש הסדרה הוא 6. בין כל שני איברים עוקבים בסדרה מפגשים איבר נוסף, כך שמתקבלת שוב סדרה חשבונית. סכום איברי הסדרה החלשה גדול ב-207 מסכום איברי הסדרה המקורית.
מצא את האיבר הראשון של הסדרה.

תשובה: -4

1. סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסגה: $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+2} = a_n + 9 \end{cases}$

- בסדרה זו 23 איברים.
א. חשב את הסכום: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{23}$.
ב. נתון: $a_5 - a_2 = -5$. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה נתונה.

תשובה: א. 630 ב. 440

בסדרה חשבונית 13 איברים. האיבר השמיני בסדרה קטן פי 30 מסכום כל האיברים שאחריו.

א. הראה כי: $a_{13} + 4a_6 = 0$.

ב. נתון כי הסדרה היא סדרה יקרת. מצא באיזה מקום בסדרה נמצא האיבר השלילי הראשון?

תשובה: ב. במקום השמיני

בסדרה חשבונית מספר זוגי של איברים. סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים גדול ב-27 מסכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים. האיבר האחרון בסדרה זו גדול ב-51 מן האיבר הראשון שלה.

- א. חשב את הפרש הסדרה.
ב. מצא את מספר איברי הסדרה.
ג. סכום עשרת האיברים האחרונים של הסדרה הוא 455. מצא את האיבר הראשון של הסדרה.

תשובה: א. 3 ב. 18 ג. 8

בסדרה חשבונית יש מספר זוגי של איברים. סכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים קטן ב-15 מסכום האיברים שבמקומות הזוגיים. האיבר האחרון גדול ב-27.5 מהאיבר הראשון.

מצא כמה איברים בסדרה.

בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון שסכום הסדרה גדול פי 3 מסכום מתצות האיברים הראשונים וגדול פי 2.1 מסכום האיברים שבמקומות האי-זוגיים.

מצא את מספר האיברים בסדרה. (14)

בסדרה חשבונית ישנם 2n איברים. סכום ה האיברים האחרונים גדול ב-147 מסכום ה האיברים הראשונים. האיבר האחרון גדול ב-39 מהאיבר הראשון.

מצא את מספר האיברים שבסדרה ואת ההפרש שלה. (3, 14, ...)

בסדרה חשבונית יש $2n+1$ איברים. סכום כל איברי הסדרה גדול פי $1\frac{8}{9}$ מסכום $n+1$ האיברים שנמצאים במקומות האי-זוגיים.

מצא את מספר איברי הסדרה. (7, 4)

נתונה סדרה המוגדרת לכל n טבעי על-ידי הכלל: $a_n = 1 + R_n - 2n^2$ כאשר:

$$R_n = 5 + 9 + 13 + \dots + (4n+1)$$

א. מצא נוסחה ל- a_n (הבע באמצעות n בלבד).

ב. הוכח שהסדרה הנתונה היא סדרה חשבונית.

ג. מצא נוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה.

תשובה: א. $a_n = 3n + 1$ ג. $\frac{3n^2 + 5n}{2}$

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי התבנית: $a_n = 9n^2 - R_n - 2$,

כאשר R_n נתון על-ידי: $R_n = 3 + 6 + 9 + \dots + 6n$.

נ (א) מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n .

תשובה: $3n^2 - 3n - 2$

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי התבנית: $a_n = 4n - 6 + R_n$,

כאשר R_n נתון על-ידי: $R_n = 2n + (2n+2) + (2n+4) + \dots + 4n$.

נ (א) מצא נוסחה ל- a_n כפונקציה של n . $(3n^2 + 7n - 6)$

